

Egyenlőtlenségek alkalmazása egyenletek megoldása során

Összeállította: Ágotai László

középiskolai tanár Kisújszállás

- 1.) a.) Oldjuk meg az $\frac{n^2 + 2}{\sqrt{n^2 + 1}} = 2$ egyenletet ! ($n \in \mathbf{Z}$).
- b.) Oldjuk meg az $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2 + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2 = n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) egyenletet !
- c.) Adjuk meg az $(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_n) = 2^n$ egyenlet összes olyan megoldását, amelyre $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ ($n \in \mathbf{N}^+$).
- 2.) Mit mondhatunk arról a háromszögről, amelynek oldalaira teljesül, hogy
- $$\frac{a+c}{a+b-c} + \frac{b+a}{b+c-a} + \frac{c+b}{c+a-b} = 6$$
- 3.) Létezik-e olyan $x \in (0; 2)$ valós szám, amelyre $\forall n \geq 2$ esetén teljesül, hogy
- $$\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2-x}}\right) = 4$$
- 4.) Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer összes pozitív megoldását:
- $$x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = \dots = x_{n-1} + \frac{1}{x_n} = x_n + \frac{1}{x_1} = 2 \quad (n \in \mathbf{N}^+).$$
- 5.) Oldjuk meg az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt{a^2b + ab^2}}$ egyenletet a pozitív számok halmazán !
- 6.) Oldjuk meg az $\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^b$ egyenletet, ahol $a, b \in \mathbf{N}^+$.
- 7.) Oldjuk meg az $(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + \frac{3}{4} = a+b+c$ egyenletet !
- 8.) Adjuk meg az $x_1 + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{3^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{2^2 \cdot x_1} + \frac{1}{3^2 \cdot x_2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2 \cdot x_n} = \frac{2n}{n+1}$ egyenlet összes pozitív $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ megoldását ! ($n \in \mathbf{N}^+$).
- 9.) Legyen $x_i \geq 1$ $i = 1, \dots, n$, ahol $n \in \mathbf{N}^+$. Oldjuk meg a következő egyenletet :
- $$\sum_{k=1}^n (\log_{x_{k+1}} x_k) = n \cdot \sqrt[n]{\log_{x_{n+1}} x_1}$$
- 10.) Oldjuk meg az $x - \lg(2^x + x - 1) = x \cdot \lg 2,5$ egyenletet !
- 11.) Bizonyítsuk, hogy ha $(x_1, x_2; \dots; x_n)$ megoldásai az $x_i + \frac{2}{x_i} = 2 \cdot x_{i+1}$ és
- $$x_n + \frac{2}{x_n} = 2 \cdot x_1 \quad (n \in \mathbf{N}^+) \text{ egyenletrendszernek, akkor } \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \geq n \cdot \sqrt{2}.$$
- Adjuk meg az egyenletrendszer összes megoldását !

Megoldások

- 1.) a.) Oldjuk meg az $\frac{n^2 + 2}{\sqrt{n^2 + 1}} = 2$ egyenletet ! ($n \in \mathbb{Z}$).
- b.) Oldjuk meg az $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2 + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2 = n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) egyenletet !
- c.) Adjuk meg az $(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_n) = 2^n$ egyenlet összes olyan megoldását, amelyre $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

1/a.) 1.Megoldás: Az egyenlet ekvivalens az $\frac{n^2 + 2}{2} = \sqrt{n^2 + 1}$ egyenlettel, amelyből a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\frac{n^2 + 2}{2} = \frac{n^2 + 1 + 1}{2} \geq \sqrt{(n^2 + 1) \cdot 1} = \sqrt{n^2 + 1},$$

és egyenlőség csak $n^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 = 0 \Leftrightarrow n = 0$ esetén állhat fenn.

Tehát az egyetlen megoldás $n = 0$.

2.Megoldás: Az egyenletet átrendezve

$$2 = \frac{n^2 + 2}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n^2 + 1 + 1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \sqrt{n^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \geq 2$$

amiből $\sqrt{n^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = 2$, azaz $\sqrt{n^2 + 1} \geq 0$ miatt $\sqrt{n^2 + 1} = 1$, tehát $n^2 = 0$, amiből $n = 0$.

1/b.) Felhasználva a négyzetes a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2 + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2}{n} \geq \frac{\left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \left|\frac{x_2}{x_3}\right| + \dots + \left|\frac{x_{n-1}}{x_n}\right| + \left|\frac{x_n}{x_1}\right|}{n} \geq \sqrt[n]{\left|\frac{x_1}{x_2}\right| \cdot \left|\frac{x_2}{x_3}\right| \cdot \dots \cdot \left|\frac{x_{n-1}}{x_n}\right| \cdot \left|\frac{x_n}{x_1}\right|} = 1$$

és egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2}{x_3}\right| = \dots = \left|\frac{x_{n-1}}{x_n}\right| = \left|\frac{x_n}{x_1}\right|$

amiből $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n|$.

1/c.) Vizsgáljuk először az $(1+|x_1|) \cdot (1+|x_2|) \cdot \dots \cdot (1+|x_n|) = 2^n$ egyenletet.

Használjuk fel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{1 + |x_i|}{2} \geq \sqrt{|x_i|} \quad \text{ahol } i = 1, \dots, n, \text{ azaz} \quad 1 + |x_i| \geq 2\sqrt{|x_i|}$$

A kapott n számú egyenlőtlenséget összeszorozva:

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|) \dots (1 + |x_n|) \geq 2^n \sqrt{|x_1| \cdot |x_2| \cdot \dots \cdot |x_n|} = 2^n$$

és egyenlőség csak $|x_i| = 1$ esetén állhat fenn.

Ha valamely i -re $x_i = -1$ volna, úgy az egyenlet baloldala 0 lenne, így a lehetséges egyetlen megoldás: $x_i = 1$, ha $i = 1, \dots, n$.

2.) Mit mondhatunk arról a háromszögről, amelynek oldalaira teljesül, hogy

$$\frac{a+c}{a+b-c} + \frac{b+a}{b+c-a} + \frac{c+b}{c+a-b} = 6 \quad (1)$$

Megoldás: Vezessük be a következő kifejezéseket:

$$\text{Legyen } \left. \begin{array}{l} x = a+b-c \\ y = b+c-a \\ z = c+a-b \end{array} \right\} \text{ ekkor } \left\{ \begin{array}{l} a+c = \frac{x+y+2z}{2} \\ b+a = \frac{2x+y+z}{2} \\ c+a = \frac{x+2y+z}{2} \end{array} \right. \text{ és nyilván } x, y, z > 0.$$

Ekkor (1) baloldala így írható:

$$\begin{aligned} \frac{x+y+2z}{2x} + \frac{2x+y+z}{2y} + \frac{x+2y+z}{2z} &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2x} + \frac{z}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{y} + \frac{z}{2y} + \frac{x}{2z} + \frac{y}{z} + \frac{1}{2} = \dots \\ \frac{1}{2} \left(3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) &\geq \frac{1}{2} \left(3 + 2 + 2 + 2 + 3 \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}}{3} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(9 + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{xyz}{xyz}} \right) = \frac{1}{2} (9 + 3) = 6 \quad (2) \end{aligned}$$

Tehát (1) illetve (2) baloldala ≥ 6 , így az egyenlet pontosan akkor teljesülhet, ha:

- a.) $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$, azaz $x = y = z$, amiből
- b.) $a = b = c$, azaz a háromszög szabályos.

3.) Létezik-e olyan $x \in (0; 2)$ valós szám, amelyre $\forall n \geq 2$ esetén teljesül, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2-x}} \right) = 4$$

Megoldás: Használjuk fel, hogy $\sqrt[n]{x} + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \geq 2 \quad (1)$

és $1 = \frac{x + (2-x)}{2} \geq \sqrt{x(2-x)} \quad (2)$ azaz $1 \geq \sqrt{x(2-x)}$, amiből

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x(2-x)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{2-x}}, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{\sqrt[n]{2-x}} \geq \sqrt[n]{x}. \quad (3)$$

Ezek felhasználásával:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2-x}} \right) = 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{x(2-x)}} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} + \sqrt[n]{x} + 1 = 2 + \sqrt[n]{x} + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \geq 4$$

és az utolsó lépésben egyenlőség pontosan csak $\sqrt[n]{x} = 1$, azaz $x = 1$ esetén állhat fenn, amire teljesül, hogy $1 \in (0; 2)$.

Megoldások

Egyenlőtlenségek az egyenletek megoldásában

4.) Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer összes pozitív megoldását:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = x_2 + \frac{1}{x_3} = \dots = x_{n-1} + \frac{1}{x_n} = x_n + \frac{1}{x_1} = 2 \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Megoldás: Adjuk össze az egyenleteket, és használjuk fel, hogy $\left| x_i + \frac{1}{x_i} \right| \geq 2$.

$$\text{Kapjuk, hogy } (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) + \dots + \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right) \geq 2n,$$

amiből $x_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$ esetén.

5.) Oldjuk meg az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt{a^2b + ab^2}}$ egyenletet a pozitív számok halmazán !

Megoldás: Próbáljuk megbecsülni az egyenlet két oldalának egymáshoz való viszonyát.

Mivel $\sqrt{a^2b + ab^2} = \sqrt{ab(a+b)} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a+b}$, érdemes lenne ennek a becslését megpróbálni.

$a, b > 0$ miatt alkalmazhatjuk a harmonikus és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{és egyenlőség csakis } a = b \text{ esetén}) \quad (1.a.)$$

$$\text{és } \sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b) \cdot 1} \geq \frac{2(a+b) \cdot 1}{a+b+1} \quad (\text{és egyenlőség pontosan } a+b=1 \text{ esetén}) \quad (1.b.)$$

$$(1.a.) \text{ és } (1.b.) \text{ szorzatából: } \sqrt{ab(a+b)} \geq \frac{4ab(a+b)}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{4ab}{a+b+1} \quad (2)$$

$$\text{innen } \frac{4}{\sqrt{ab(a+b)}} \leq \frac{a+b+1}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \quad (3)$$

Ezért az egyenlet csakis akkor lehet igaz, ha (3)-ban egyenlőség van, azaz (1.a-b)-ben is egyenlőségek teljesülnek.

Mivel a harmonikus és a mértani közép közötti egyenlőtlenség (1.a.)-ban pontosan $a = b$, míg (1.b.)-ben pontosan $a+b=1$ esetén áll fenn, így egyenletünk megoldása:

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Megoldások

Egyenlőtlenségek az egyenletek megoldásában

6.) Oldjuk meg az $\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^b$ egyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{N}^+$.

1.Megoldás: Az egyenlet ekvivalens az $\frac{a+1}{b+1} = \sqrt[b+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^b}$ egyenlettel.

$a, b > 0$ miatt tekinthetjük a b számú $\frac{a}{b}$ tört és 1 db. 1-es (összesen $b+1$ db. szám) számtani közepét, és használjuk fel, hogy ez nem kisebb ugyanezen számok mértani közepénél:

$$\frac{a+1}{b+1} = \frac{b \cdot \frac{a}{b} + 1}{b+1} \geq \sqrt[b+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^b \cdot 1} = \sqrt[b+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^b} \quad (1)$$

és (1)-ben a számtani és mértani közép között pontosan akkor állhat fenn egyenlőség, ha $\frac{a}{b} = 1$, azaz $a = b$.

2.Megoldás: Az $\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} = \left(\frac{a+1}{b+1}\right)^b \cdot \left(\frac{a+1}{b+1}\right)$ miatt az

$$\left(\frac{a+1}{b+1} \cdot \frac{b}{a}\right)^{b+1} = \frac{b}{a} \text{ egyenlet az eredetivel ekvivalens.}$$

Próbáljunk most becslést adni a baloldalra:

$$\left(\frac{(a+1)b}{(b+1)a}\right)^{b+1} = \left(\frac{ab+b}{ab+a}\right)^{b+1} = \left(\frac{ab+a+b-a}{ab+a}\right)^{b+1} = \left(1 + \frac{b-a}{ab+a}\right)^{b+1} \geq$$

a Bernoulli - egyenlőtlenséget alkalmazva: $x = \frac{b-a}{ab+a}$ és $n = b+1$

$$\geq 1 + \frac{(b+1)(b-a)}{a(b+1)} = 1 + \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a}$$

A feladatban teljesül a Bernoulli-egyenlőtlenség feltételrendszere az $x = \frac{b-a}{ab+a}$

választással, ugyanis: $1+x = 1 + \frac{b-a}{ab+a} = \frac{b(a+b)}{a(b+1)} > 0$

Így a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt $b+1 > 0$ figyelembevételével egyenlőség csak $x = 0$, azaz $a = b$ esetén lehetséges.

Megoldások

Egyenlőtlenségek az egyenletek megoldásában

7.) Oldjuk meg az $(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + \frac{3}{4} = a+b+c$ egyenletet !

Megoldás: Az egyenlet baloldalát alakítsuk a következő módon:

$$(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + \frac{3}{4} = (a+b-c)^2 + \frac{1}{4} + (a-b+c)^2 + \frac{1}{4} + (-a+b+c)^2 + \frac{1}{4}$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\frac{(a+b-c)^2 + \frac{1}{4}}{2} \geq \sqrt{(a+b-c)^2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{|a+b-c|}{2}$$

$$\frac{(a-b+c)^2 + \frac{1}{4}}{2} \geq \sqrt{(a-b+c)^2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{|a-b+c|}{2} \quad (1.a-b-c)$$

$$\frac{(-a+b+c)^2 + \frac{1}{4}}{2} \geq \sqrt{(-a+b+c)^2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{|-a+b+c|}{2}$$

(1.a-b-c) -t összeadva és felhasználva az $|x| + |y| \geq |x + y|$ összefüggést:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + \frac{3}{4}}{2} &\geq \frac{|a+b-c| + |a-b+c| + |-a+b+c|}{2} \geq \\ \frac{|a+b-c+a-b+c-a+b+c|}{2} &= \frac{|a+b+c|}{2} \geq \frac{a+b+c}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{azaz } (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + \frac{3}{4} \geq a+b+c$$

(1.a-b-c) -ben egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha

$$a+b-c = a-b+c = -a+b+c, \text{ azaz } a=b=c \text{ és}$$

$$(a-b+c)^2 = (a-b+c)^2 = (-a+b+c)^2 = \frac{1}{4}, \text{ tehát: } |a| = |b| = |c| = \frac{1}{2}.$$

Vizsgáljuk meg a lehetséges megoldásokat:

- ~ Mivel az egyenlet baloldala pozitív, sőt, nagyobb $\frac{3}{4}$ -nél, így mindhárom gyök nem lehet negatív, sőt közülük kettő sem lehet negatív, hiszen ekkor a jobboldal negatív. (= -1/2)
- ~ Tehát legfeljebb egyikük lehet -1/2 -del egyenlő.
- ~ Ha pld $a = -1/2$, akkor a jobboldal értéke $\frac{1}{2}$, ami kisebb, mint $\frac{3}{4}$, így az egyenlet egyetlen lehetséges megoldása: $a = b = c = 1/2$.

Megoldások

Egyenlőtlenségek az egyenletek megoldásában

8.) Adjuk meg az $x_1 + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots + \frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{2^2 \cdot x_1} + \frac{1}{3^2 \cdot x_2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2 \cdot x_n} = \frac{2n}{n+1}$ egyenlet összes pozitív $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ megoldását! ($n \in \mathbb{N}^+$).

Megoldás: Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$x_1 + \frac{1}{2^2 \cdot x_1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2^2}} = \frac{2}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{x_2}{2^2} + \frac{1}{3^2 \cdot x_2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{2}{2 \cdot 3}$$

.

.

$$\frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2 \cdot x_n} \geq 2\sqrt{\frac{1}{n^2(n+1)^2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

az egyenleteket összeadva:

$$x_1 + \frac{1}{2^2 \cdot x_1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{1}{3^2 \cdot x_2} + \dots + \frac{x}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2 \cdot x_n} \geq 2\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{2n}{n+1}$$

és egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $\frac{x_i}{i^2} = \frac{1}{(i+1)^2 \cdot x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$ esetén,

tehát az egyenletrendszer megoldása: $x_i = \frac{i}{i+1}$, hacsak $i = 1, \dots, n$.

9.) Legyen $x_i \geq 1 \quad i = 1, \dots, n$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sum_{k=1}^n (\log_{x_{k+1}} x_k) = n \cdot \sqrt[n]{\log_{x_{n+1}} x_1}$$

Megoldás: Írjuk fel a $\log_{x_{k+1}} x_n$ számok mértani közepét:

$$\sqrt[n]{\log_{x_2} x_1 \cdot \log_{x_3} x_2 \dots \log_{x_{n+1}} x_n} \leq \frac{\log_{x_2} x_1 + \log_{x_3} x_2 + \dots + \log_{x_{n+1}} x_n}{n},$$

$$\text{de } \log_{x_2} x_1 \cdot \log_{x_3} x_2 \dots \log_{x_{n+1}} x_n = \frac{\log_{x_{n+1}} x_1 \cdot \log_{x_{n+1}} x_2 \dots \log_{x_{n+1}} x_n}{\log_{x_{n+1}} x_2 \cdot \log_{x_{n+1}} x_3 \dots \log_{x_{n+1}} x_{n+1}} = \log_{x_{n+1}} x_1,$$

ezért minden n -re teljesül, hogy

$$\frac{\log_{x_2} x_1 + \log_{x_3} x_2 + \dots + \log_{x_{n+1}} x_n}{n} \geq \sqrt[n]{\log_{x_{n+1}} x_1}, \text{ és egyenlőség csak}$$

a.) $n = 1$, vagy

b.) $\log_{x_2} x_1 = \log_{x_3} x_2 = \dots = \log_{x_{n+1}} x_n$ esetén teljesülhet.

Van-e ilyen?

10.) Oldjuk meg az $x - \lg(2^x + x - 1) = x \cdot \lg 2,5$ egyenletet !

Megoldás: Nyilván $2^x + x - 1 > 0$, amiből $2^x > 1 - x$, ami $x > 0$ esetén teljesül.

Az egyenlet rendezéssel az $x - 1 = 2^x(2^x - 1)$ alakra hozható.

Kétszer alkalmazva a Bernoulli egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$x - 1 = 2^x(2^x - 1) = (1+1)^x(2^x - 1) \geq (1+x)(2^x - 1) = (1+x)((1+1)^x - 1) \geq \geq (1+x)(1+x-1) = x(1+x)$$

Tehát kaptuk, hogy $x - 1 > x^2 + x$, amiből $0 > x^2 + 1$, ami lehetetlen, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

11.) Bizonyítsuk, hogy ha $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ megoldásai az $x_i + \frac{2}{x_i} = 2 \cdot x_{i+1}$ és

$$x_n + \frac{2}{x_n} = 2 \cdot x_1 \quad (n \in \mathbf{N}^+) \text{ egyenletrendszernek, akkor } \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \geq n \cdot \sqrt{2}.$$

Adjuk meg az egyenletrendszer összes megoldását !

Megoldás: Minden változó azonos előjelű kell, hogy legyen, így elegendő pozitív megoldásokat keresni, hiszen ha $\{x_i \mid x_i > 0\}$ ($i=1, \dots, n$) egy megoldás, úgy $\{-x_i\}$ is megoldás lesz.

1.Megoldás: Az egyenleteket átrendezve:

$$x_{i+1} = \frac{x_i + \frac{2}{x_i}}{2} \geq \sqrt{2} \quad (i=1, \dots, n-1) \text{ és } x_1 = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \geq \sqrt{2} \quad (1.a-b)$$

$$(1.a-b) \text{ -ből } \sum_{i=1}^n x_i \geq n\sqrt{2}, \text{ ha } x_i > 0, \text{ azaz } \sum_{i=1}^n |x_i| \geq n\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\text{amiből, mivel minden gyök azonos előjelű } \sum_{i=1}^n |x_i| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \geq n\sqrt{2} \quad (3)$$

2.Megoldás: A számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség miatt:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i} \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{2n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}, \text{ de } 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\text{így } \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq 2n^2, \text{ azaz } \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \geq n\sqrt{2} \text{ és egyenlőség csak } x_i = \sqrt{2} \text{ esetén lehet.}$$

Megoldások

Egyenlőtlenségek az egyenletek megoldásában

Megmutatjuk, hogy csak $|x_i| = \sqrt{2}$ lehet.

A.) $|x_i| < \sqrt{2}$ nem lehet, mert ekkor $\sum x_i < n\sqrt{2}$ lenne.

B.) Másrészt $x_{i+1} = \frac{x_i + \frac{2}{x_i}}{2}$ miatt, mivel a számtani közép a két mennyiség között van,

vagy $x_i > x_{i+1} > \frac{2}{x_i}$ (a), vagy $x_i < x_{i+1} < \frac{2}{x_i}$ (b) kell, hogy teljesüljön.

(a) -ből $x_1 > x_2 > \dots > x_n > x_1$, azaz $x_1 > x_1$

(b) -ből $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_1$, azaz $x_1 < x_1$ következne, ami lehetetlen.

Így a megoldások: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt{2}$, vagy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = -\sqrt{2}$.