Kalandozás a rácspontok világában

Ágotai László (Kisújszállás)

1.) Hány egész koordinátájú pont van azon a szakaszon, amelynek végpontjai (3 ; 17) és (48 , 281)?

2.) Igazoljuk, hogy ha az $ax + by = c$ (a, b, c egészek) egyenletnek van egész x_0, y_0 megoldása, akkor végtelen sok van?

3.) Igaz-e, hogy ha a térben felveszünk 9 rácspontot, és ezeket páronként összekötjük, akkor az így keletkező szakaszok között biztosan lesz olyan, amelyik tartalmaz a belsejében újabb rácspontot?

4.) Igazoljuk, hogy: a.) Bármely rácsháromszög területének kétszerese egész szám és hogy
b.) Bármely rácssokszög területének kétszerese egész szám!
(Azaz: rácssokszög területének mérőszáma vagy egész, vagy feles szám.)

5.) Igazoljuk, hogy:
a.) Ha egy rácssokszög határán h, a belsejében b darab rácspont van, akkor a sokszög $N=2b+h-2$ üres rácsháromszögre vágható bármilyen darabolás esetén!
b.) Az üres rácsháromszög területe ½!

6.) Igazoljuk, hogy ha egy rácsháromszög belsejében egyetlenegy rácspont van, akkor az a háromszög súlypontja!

7.) Létezik-e a síkon szabályos rácsháromszög? És a térben?

8.) Milyen szabályos rácssokszögek léteznek?

9.) a.) Egy főállású rácsnégyzet rácspontjai hány főállású rácsnégyzetet, illetve
b.) egy főállású rácstéglalap rácspontjai hány főállású rácstéglalapot határoznak meg?

10.) Igazoljuk, hogy a.) a C$\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ középpontú kör nem tartalmazhat a határán két rácspontot!
b.) Tetszőleges n pozitív egész számhoz létezik olyan kör, amely pontosan n darab rácspontot tartalmaz a belsejében?

11.) Igazoljuk, hogy: a.) Az origó középpontú $\sqrt{2}$ sugarú kör végtelen sok racionális koordinátájú ponton halad át.
b.) És az origó középpontú $\sqrt{3}$ sugarú kör?

12.) Vegyük azt a négyzetet, amelynek csúcsai (-5 ; 5), (5 ; 5) (5 ; -5) és (-5 ; -5). Erre, mint céltáblára adjunk le 201 lövést. Igaz-e, hogy a lövésnyomok között mindig lesz három, amelyek által alkotott háromszög területe nem nagyobb ½ -nél?
(A céltáblát mindegyik lövés eltalálta!)

13.) Az n x n –es sakktáblán fessünk be ($n-1$) mezőt. Egy újabb, eddig még be nem festett mező befesthető, ha legalább két szomszédja már be van festve.
Be lehet-e így festeni az egész sakktáblát?

14.) Meg tudunk-e adni a síkon végtelen sok rácspontot úgy, hogy:
a.) közülük semelyik három nem esik egy egyenesre,
b.) közülük bármelyik három alkotta háromszög területe racionális, és
c.) bármelyik két pont távolsága irracionális?

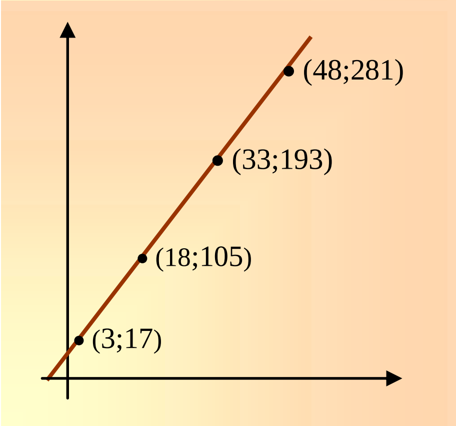
15.) Bizonyítsuk, hogy a sík kilenc rácspontja közül mindig kiválasztható három úgy, hogy az általuk alkotott háromszög súlypontja is rácspont legyen!

16.) A számegyenesen az origóból elindul egy nyúl, amely minden másodpercben pozitív irányba ugyanakkorát ugrik és ugrásainak hossza egész szám. Ennek értékét viszont nem ismerjük.
Közben vágjuk ki a számegyenesből a [0; 100] intervallumot és ragasszuk össze a végeit. A buta kis nyúl ezt nem veszi észre, csak ugrál tovább-tovább.
Egyetlegy csapdát helyezhetünk el valamelyik rácspontra.
El tudjuk-e így kapni a nyulat?

Kalandozás a rácspontok világában, megoldások

1.) *Hány rácspont van azon a szakaszon, amelynek végpontjai (3 ; 17) és (48 , 281)?*

A szakasz meredeksége $m = \frac{281-17}{48-3} = \frac{88}{15}$



Tehát a P_0(3 ; 17) pontból felmérve a **v**(15 ; 88) vektor többszöröseit, újra a szakaszon lévő pontokhoz jutunk.
Így a lehetséges pontok:
(3 ; 17) , (18 ; 105), (33 ; 193) és (48 ; 281)

Tehát a szakasz összesen négy rácspontot tartalmaz.

2.) *Igazoljuk, hogy ha az ax + by = c (a, b, c egészek) egyenletnek van egész x_0, y_0 megoldása, akkor végtelen sok van?*

Megjegyzés: A fenti egyenletet kétismeretlenes lineáris Diophantosi egyenletnek nevezzük.

Az egyenlet megoldható pontosan akkor, ha ${}^{(a\,;\,b)}/_{c}$, azaz az együtthatók legnagyobb közös osztója osztója a konstans tagnak. Legyen ugyanis (a ; b) = d.

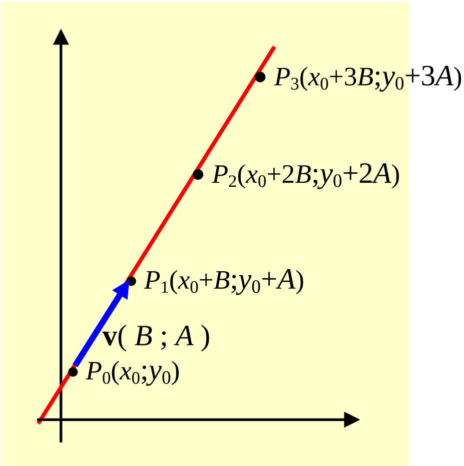
Ekkor az egyenlet így írható: $a_1 d \cdot x + b_1 d \cdot y = c$, azaz $d(a_1 \cdot x + b_1 \cdot y) = c$, ahol a zárójel egész, tehát ${}^{d}/_{c}$ kell, hogy teljesüljön.

Megoldás: Nyilván az adott egyenlet egyenes egyenlete, amelynek meredeksége az $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ alakból $m = -\frac{a}{b}$.

Legyen $m_1 = \frac{A}{B}$ a $\left(-\frac{a}{b}\right)$ tovább nem egyszerűsíthető alakja.

Ekkor a P_0(x_0 ; y_0) pontból felmérve a **v**(B ; A) vektor többszöröseit minden esetben az egyenes pontjához, azaz a kiinduló Diophantosi egyenlet megoldásához jutunk.

Ezzel beláttuk, hogy ha az $ax + by = c$ lineáris kétismeretlenes Diophantosi egyenlet megoldható, akkor végtelen sok megoldása van.



3.) *Igaz-e, hogy ha a térben felveszünk 9 rácspontot, és ezeket páronként összekötjük, akkor az így keletkező szakaszok között biztosan lesz olyan, amelyik tartalmaz a belsejében újabb rácspontot?*

Megoldás: Vizsgáljuk a pontok koordinátáinak paritását.

Mindegyik koordináta lehet páros vagy páratlan, ez összesen 2^3, azaz 8 lehetőség.

De összesen kilenc pontunk van, így biztosan lesz legalább kettő, amelyeknek mindkét koordinátája páronként azonos paritású.

De ekkor az általuk alkotott szakasz felezőpontja újra rácspont lesz.

Tehát igaz az állítás.

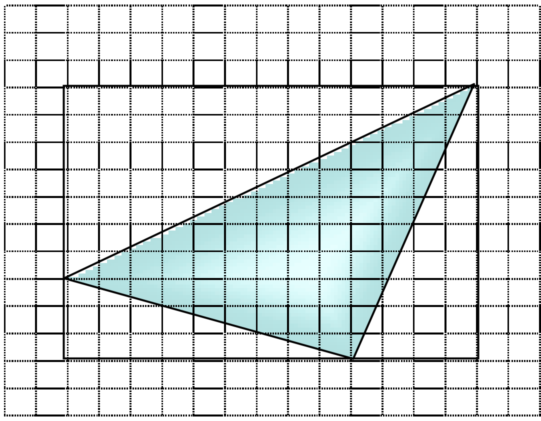
4.) Igazoljuk, hogy: a.) Bármely rácsháromszög területének kétszerese egész szám és hogy

b.) Bármely rácssokszög területének kétszerese egész szám!

(Azaz: rácssokszög területének mérőszáma vagy egész, vagy feles szám.)

Megoldás:

a.) Minden rácsháromszög olyan rácstéglalapba foglalható, amelynek oldalai főegyenesek és a rácsháromszög ebből derékszögű háromszögek levágásával keletkezik.



b.) Minden (rács)sokszög háromszögekre vágható szét, amelyek területének összege egyenlő a sokszög területével.

Következmény: Semmilyen rácssokszög területe nem lehet kisebb ½-nél.

5.) Igazoljuk, hogy:

a.) Ha egy rácssokszög határán h, a belsejében b darab rácspont van, akkor a sokszög N=2b + h -2 üres rácsháromszögre vágható bármilyen darabolás esetén.

b.) Az üres rácsháromszög területe ½ területegység.

Megoldások:

a.) Tegyük fel, hogy a szétvágással N darab üres rácsháromszöget kapunk.

Ezek szögeinek összege $N \cdot 180^0$.

Ez egyrészt a sokszög szögeiből, másrészt a belső rácspontok körüli 360^0 –os szögekből tevődik össze, tehát $N \cdot 180^0 = (h - 2) \cdot 180^0 + b \cdot 360^0$.

Ebből 180^0 –kal való osztással adódik az állítás.

b.) Az üres rácsháromszög területe ½.

Megoldás: Foglaljuk be a háromszöget egy n x n –es rácsnégyzetbe.(Oldalai főegyenesek.)

Bontsuk fel a négyzetet üres rácsháromszögekre úgy, hogy az adott üres rácsháromszög is szerepeljen a felbontásban.

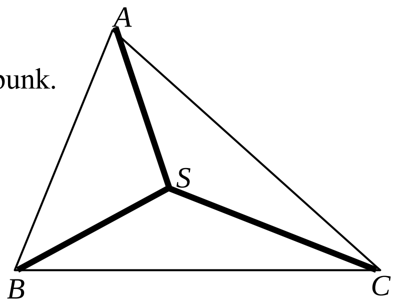
Az üres rácsháromszögek száma független a felbontástól és $2n^2$ –tel egyenlő (Egyenlőszárú derékszögű háromszögekre való felbontásból látszik), és ezek területe összesen n^2.

Ekkor egy üres rácsháromszög területének átlaga $\overline{T} = \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

Mivel semmilyen rácssokszög területe nem lehet 1/2-nél kisebb, így mindegyik területe ½ kell, hogy legyen.

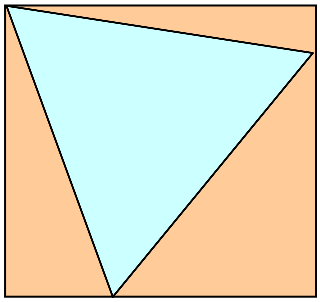
6.) Igaz-e, hogy ha egy rácsháromszög belsejében egyetlenegy rácspont van, akkor ez a háromszög súlypontja.

Megoldás: Ha a rácsháromszög belsejében egyetlenegy rácspont van, akkor ezt a háromszög csúcsaival összekötve üres rácsháromszögeket kapunk. Ezek területe viszont az előbbiek miatt ½, tehát egyenlő.
Ha viszont egy, a háromszög belsejében lévő pont egyenlő területű részekre osztja a háromszöget, akkor ez a súlypont.



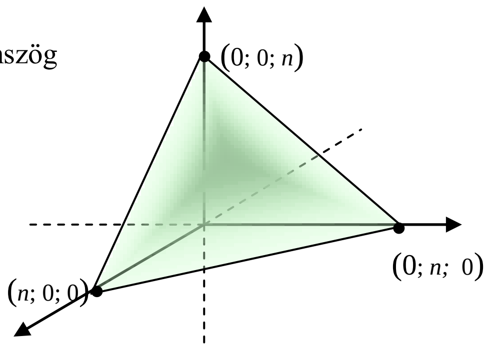
7.) Létezik e a síkon szabályos rácsháromszög? És a térben?

Megoldás: Tételezzük fel, hogy van!
Ekkor belefoglalható egy rácstéglalapba, amelynek a területe racionális (egész vagy feles szám).
A háromszög területét derékszögű háromszögterületek kivonásával kapjuk, tehát az is racionális. (*)



De a szabályos háromszög területe $t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, de itt a^2 egész, mert négyzetszámok összege, tehát a szabályos rácsháromszög területe irracionális kell, hogy legyen. (**)
(*) ellentmond (**) –nak.
Tehát nincs a síkon szabályos rácsháromszög.

És a térben? Végtelen sok van.

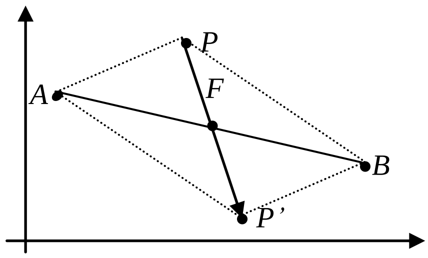


Az (n; 0; 0), (0; n; 0) és (0, 0; n), $n \in \mathbf{Z}$ pontok mindig szabályos rácsháromszöget alkotnak.

8.) Milyen szabályos rácssokszögek léteznek?

Megmutatjuk, hogy n = 4 kivételével nincsenek szabályos rács n-szögek.

Megjegyzés: először megmutatjuk, hogy ha egy rácspontot egy rácsszakasz felezőpontjára tükrözünk, akkor újra rácsponthoz jututnk.
Tükrözzük ugyanis P-t az AB szakasz F felezőpontjára**,** azaz tükrözzük az ABP háromszöget egyik oldalfelezőpontjára.
Ekkor viszont paralelogrammához jutunk, és ha egy paralelogramma három csúcsa rácspont, a negyediknek is rácspontnak kell lennie.



A feladat megoldása: Tegyük fel, hogy létezik szabályos rács n-szög, ahol $n \neq 3$, 4,és 6.
Mivel kétszeres területe egész, így létezik közöttük minimális területű.
Tekintsük ezt.

Tükrözzük minden csúcsát a szomszédos csúcsokat összekötő átló felezőpontjára.

Így az előző pont szerint újra rácssokszöghöz jutunk, amely szabályos, és amelyet eredeti sokszögünk tartalmaz.

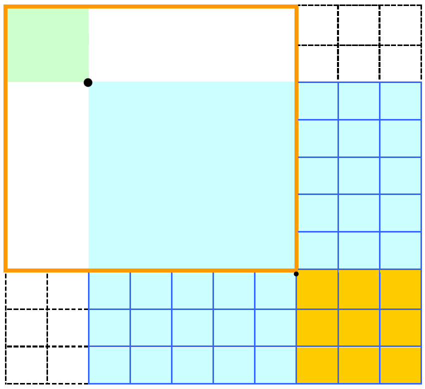
Ekkor viszont ennek területe kisebb, mint az előző rácssokszög területe, ami ellentmond annak, hogy a minimális területű szabályos rács n –szögből indultunk ki.

Szabályos rácshatszög pedig azért nem létezik, mert ennek másodszomszédos csúcsai szabályos rácsháromszöget alkotnának.

9.) a.) Egy főállású rácsnégyzet rácspontjai hány főállású rácsnégyzetet, illetve

b.) egy főállású rácstéglalap rácspontjai hány főállású rácstéglalapot határoznak meg?

a.) Megoldás: Tekintsünk egy n x n –es négyzetet!



1 x 1 –es négyzetből nyilván n^2 darab van,

2 x 2 –es négyzetből $(n-1)^2$ darab van,

3 x 3 –as négyzetből $(n-2)^2$ darab van,

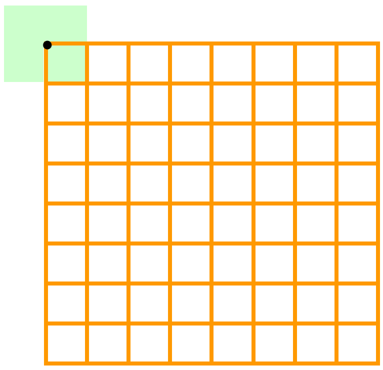
n x n –es négyzetből. $1^2 = 1$ darab van.

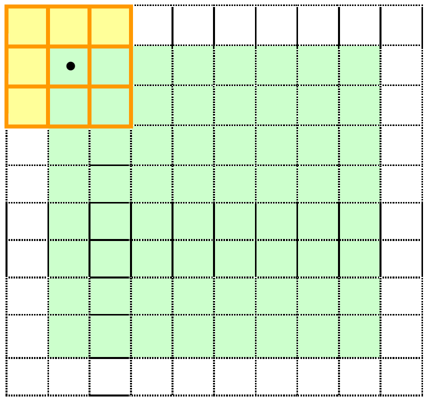
.

Tehát a keletkezett kisebb négyzetek száma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

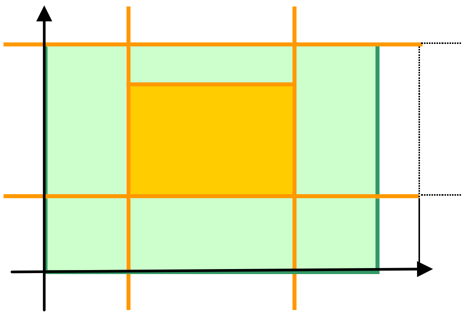
Egy másik leszámlálási mód:





Páros oldalszámú négyzet középpontját, illetve páratlan oldalszámú négyzet középső négyzetét hány helyre tehetjük le?

b.) Megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül elhelyezhetjük a téglalapot az ábrán látható módon.



Minden téglalapot egy vízszintes és egy függőleges, főegyenesek által határolt sáv metszeteként kapunk. Azt kell összeszámolni, hogy hány vízszintes és hány függőleges sáv van.

Legyen a téglalap n x m –es, azaz álljon n sorból és m oszlopból.

Számoljuk le például a függőleges sávok számát:

Ha a sáv első egyenese az $x = 0$ egyenes, akkor a második egyenes m- féleképpen helyezkedhet el.

Ha a sáv második egyenese az $x = 1$ egyenes, akkor a második egyenese ($m – 1$) –fél lehet, stb, azaz ha az első egyenes az $x = k$ ($0 \le k \le m$) egyenes, akkor a második $m – k$ féleképp helyezkedhet el.

Így a függőleges sávok száma $1+2+3+...+m=\frac{m(m+1)}{2}$

Hasonlóan kapható, hogy a vízszintes sávok száma $\frac{n(n+1)}{2}$, ezért a keletkezett téglalapok száma

$$N=\frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

10.) Igazoljuk, hogy

a.) A C($\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ középpontú kör nem tartalmazhat a határán két rácspontot!

Megoldás: Tudjuk, hogy a kör húrjainak felezőmerőlegese átmegy a középponton.

Ezért, ha a tekintett kör tartalmazna két rácspontot, akkor ezek felezőmerőlegesének át kellene mennie a *C*($\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ középponton.

A két pontra illeszkedő vektor koordinátái egészek, hiszen rácspontokat köt össze, és ez egyben a felezőmerőleges normálvektora is, tehát e felezőmerőleges egyenlete $ax + by = c$ alakú , ahol a, b és c egészek.

(c azért egész, mert a felezőmerőleges kezdőpontja a két rácspont felezőpontja, amely vagy egész vagy feles szám.)

De a felezőmerőlegesnek tartalmaznia kell C-t, azaz fenn kellene állnia az

$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=c$ egyenletnek.

Ezt négyzetre emelve $2a^2+3b^2+2\sqrt{6}\cdot ab=c^2$ adódik, amiből

$$\sqrt{6}=\frac{c^2-2a^2-3b^2}{2ab},$$

de itt a jobboldalon a, b és c egész volta miatt racionális szám áll, ami ellentmondás.

b.) ***Tetszőleges n pozitív egész számhoz található olyan kör, amely pontosan n darab rácspontot tartalmaz a belsejében?***

Megoldás: Az a.) pont szerint a $C\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ középpontú kör legfeljebb egy rácsponton mehet át.

Vegyünk egy C körüli olyan kicsiny sugarú kört, amelyik egyetlen rácsponton sem halad át.

Ennek a sugarát fokozatosan növelve tetszőleges számú rácspont a belsejébe kerülhet.

11.) Igazoljuk, hogy

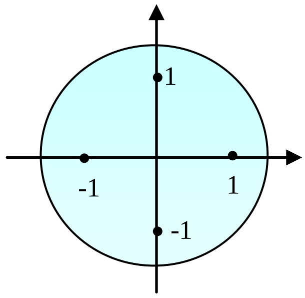
a.) Az origó középpontú $\sqrt{2}$ sugarú kör végtelen sok racionális koordinátájú ponton halad át.

b.) És az origó középpontú $\sqrt{3}$ sugarú kör?

Megoldás:

a.) A kört lerajzolva rácspontot csak négy rácspontot találunk, amelyen áthalad.

Racionális koordinátájú pontot pedig biztos, hogy megszámlálhatóan végtelen soknál többet nem fogunk találni.



A feladatban említett kör egyenlete $x^2 + y^2 = 2$.

A szimmetria miatt elegendő az első síknegyedre korlátozódni, mert ha ott találunk egy pontot, akkor rögtön adódik még másik három is.

A kérdés az,hogy az $x^2 + y^2 = 2$ egyenletnek létezik-e racionális megoldása?

Tegyük fel, hogy van, például $x = a/b$, ahol a és b egészek.

Fejezzük ki a kör egyenletéből y-t:

$$x = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2b^2 - a^2}}{b}.$$

Így y pontosan akkor racionális, amennyiben a négyzetgyökös kifejezés egész, azaz a gyök alatti mennyiség négyzetszám.

$\sqrt{2b^2 - a^2} = c \Rightarrow 2b^2 - a^2 = c^2$, azaz $2b^2 = a^2 + c^2$

Ez utóbbi egyenlőség nagyon utal a Pithagorasz-tételre.

Egy trükköt vetünk be.

Az a és c egész számok, így felírhatók alkalmas u és v egészekkel a következőképpen:

$$a = u + v,\ c = u - v \Rightarrow 2b^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2 \Rightarrow b^2 = u^2 + v^2$$

A sor végén pedig már a jól ismert Pithagorasz tétel-forma áll! Azaz ha az u, v, b egészeket pithagoraszi számhármasnak választjuk, akkor a belőlük számított a, b, c számokkal kielégítik egyenletünket a következőképp:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 2$$

Mivel pithagoraszi számhármast végtelen sokat találunk, így feladat kérdésére adott válasz:

Az említett kör végtelen sok racionális koordinátájú ponton halad át.

b.) Ha össze akarjuk számolni a körön fekvő rácspontokat, nem találunk egyet sem. Racionális koordinátájú pontot vajon találunk-e? A korábbi feladatban végtelen sok volt…

Próbálkozzunk az előző példa alapján! Most az egyenlet $x^2 + y^2 = 3$ alakú. Legyen ismét $x = a/b$, ahol a és b egészek.

Ekkor $$x = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + y^2 = 3 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{b}.$$

A négyzetgyöknek egész értéket szeretnénk adni, ezért $\sqrt{3b^2 - a^2} = c \Rightarrow 3b^2 = a^2 + c^2$.

A trükk az előbbi formájában most nem működik!

Akkor próbáljunk valamit kezdeni a 3-mal:

Az biztos, hogy $3b^2$ osztható hárommal. Tudjuk, hogy négyzetszámok csak 0 vagy 1 maradékot adhatnak 3-mal osztva: $(3k)^2 = 3t + 0$; $(3k+1)^2 = 3t + 1$; $(3k+2)^2 = 3t + 1$.

a.) Ha a^2 vagy c^2 3-mal való osztási maradéka 1, akkor készen is vagyunk. Ugyanis a másik számnak 2 maradékot kéne adnia, hogy az összeg 3-mal osztható legyen. Azonban ez lehetetlen, mert mindkettő négyzetszám.

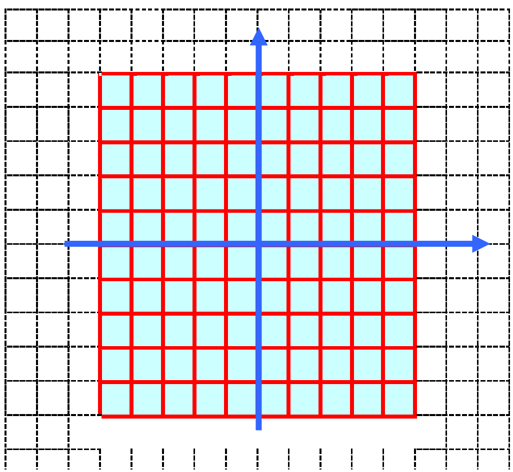
b.) A másik lehetőség, ha a^2 és c^2 is 3-mal osztható. (Ez csak úgy lehetséges, ha a és c is osztható volt 3-mal.) Ekkor viszont mindegyikben páros sok 3-as prímtényező szerepel, mert négyzetszámok. Nézzük az egyenlőség másik oldalát: $3b^2$-ben biztosan páratlan sok 3-as prímtényező van, mert a négyzetszámban páros sok plusz még egy előtte.

Így a számelmélet alaptételével kerülünk így ellentmondásba, tehát ez az eset sem lehetséges.

Így viszont semmilyen eset sem lehetséges, ami nekünk megfelelne.

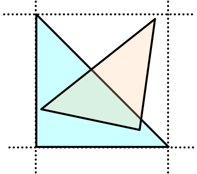
Következésképp a feladatban említett kör nem halad át racionális koordinátájú pontokon!

12.) ***Vegyük azt a négyzetet, amelynek csúcsai* (-5 ; 5), (5 ; 5) (5 ; -5) *és* (-5 ; -5). *Erre, mint céltáblára adjunk le 201 lövést. Igaz-e, hogy a lövésnyomok között lesz három, amelyek által alkotott háromszög területe nem nagyobb ½ -nél? (A céltáblát mindegyik lövés eltalálta!)***



Megoldás: Húzzuk meg a kijelölt négyzet főegyeneseit. Ezzel a négyzetet 100 db. egységnégyzetre osztottuk. Mivel 201 lövést adtunk le és ezek mindegyike talált, kell lenni olyan négyzetnek, amelyben három találat van. (A belsejében vagy a határán.)

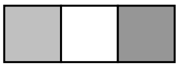
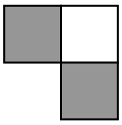
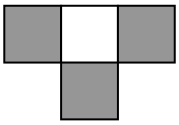
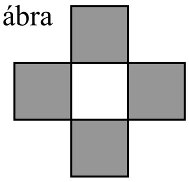
De ekkor a lehető legnagyobb területű háromszög területe ½, így a keletkező háromszög területe T ≤ ½, ami az álítás volt.



13.) ***Az n x n –es sakktáblán fessünk be (n – 1) mezőt. Egy újabb, eddig még be nem festett mező befesthető, ha legalább két szomszédja már be van festve.***
Be lehet-e így festeni az egész sakktáblát?

Megoldás: Az adott feltételek szerint biztosan befesthető lenne a sakktábla, ha két szomszédos oldala mentén be lennének festve a mezők. Ebben az esetben a teljes befestett rész kerülete $4 \cdot n$ lenne.
Mivel a feladat szerint csak $(n - 1)$ mező van befestve, ez az eset nem állhat fenn.
A befestett rész K_{n-1} kerületére teljesül , hogy $K_{n-1} \leq 4 \cdot (n - 1)$
Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik a befestett rész kerülete, ha a megadott szabály szerint festünk be újabb mezőt ?

a.) Ha két átellenes szomszéd volt befestve, a befestett rész kerülete változatlan marad,
b.) Ha két, egymással csúcsban találkozó szomszéd volt befestve, a befestett rész kerülete ismét csak nem változik,
c.) Ha három, egymással páronként csúcsban találkozó szomszéd volt befestve, akkor a befestett rész kerülete 2 –vel csökken,
d.) Ha mind a négy szomszéd be volt festve, akkor a befestett rész kerülete 4 –gyel fog csökkenni az újabb mező befestése során.

a.) ábra

b.) ábra

c.) ábra

d.) ábra


Tehát K_{n-1} egyetlen esetben sem nőhet, így mivel a teljesen befestett sakktábla befestett mezőinek kerülete $4 \cdot n$ lenne, a kívánt befestés nem végezhető el.

14.) Meg tudunk-e adni a síkon végtelen sok rácspontot úgy, hogy:

a.) közülük semelyik három nem esik egy egyenesre,
b.) közülük bármelyik három alkotta háromszög területe racionális, és
c.) bármelyik két pont távolsága irracionális?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy az $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ ”félparabola” rácspontjai eleget tesznek a feltételnek.

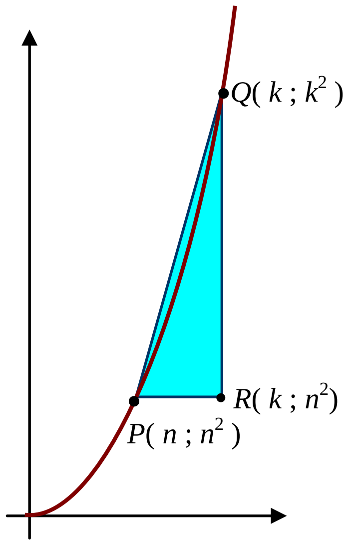
a.) teljesülése triviális.

b.) is teljesül, hiszen a tekintett pontok rácsháromszögeket alkotnak és ezek területe vagy egész, vagy feles szám, tehát racionális

c.) teljesülését meg kell vizsgálni.

Tekintsük a $P(\ n\ ;\ n^2\ )$ és $Q(\ k\ ;\ k^2\ )$ rácspontokat!

A PQ távolság az ismet összefüggés alapján:



$$PQ=\sqrt{(k-n)^2+\left(k^2-n^2\right)^2}=\sqrt{(k-n)^2+(k-n)^2\cdot(k+n)^2}=$$

$$=\sqrt{(k-n)^2\cdot\left((k+n)^2+1\right)}=(k-n)\cdot\sqrt{(k+n)^2+1}$$

Ez $(k+n)^2+1$ egész volta miatt csak akkor lehetne racionális,

ha $(k+n)^2+1$ négyzetszám lenne, azonban $(k+n)^2$ négyzetszám

és nincs két egymás utáni nágyzetszám.

Ezért $(k+n)^2+1$ nem lehet négyzetszám, tehát $\sqrt{(k+n)^2+1}$ irracionális,

azaz PQ irracionális.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

15.) Bizonyítsuk, hogy a sík kilenc rácspontja közül mindig kiválasztható három úgy, hogy az általuk alkotott háromszög súlypontja is rácspont legyen!

Megoldás: A kilenc rácspont mindegyikéhez rendeljük hozzá koordinátáik hárommal való osztási maradékát, azaz a (0 ; 0), (0 ; 1), (0 ; 2), . . . (2 ; 2) számpárok valamelyikét.

Ez összesen kilenc lehetőség.

Két esetet kell megkülönböztetnünk:

a.) A kilenc ponthoz rendelt számpárok között legfeljebb négy különböző van.

Ekkor a skatulyaelv miatt biztosan lesz három olyan pont, amely ugyanazt a maradékpárt adja, azaz koordinátáik ($3m+r$; $3M+q$), ($3n+r$; $3R+q$) és ($3k+r$; $3K+q$) alakúak.

Az ezek által alkotott háromszög súlypontja:

$$S=\left(\frac{3m+r+3n+r+3k+r}{3};\frac{3M+q+3N+q+3K+q}{3}\right)=(m+n+r+k+r;M+N+K+q)$$

tehát rácspont.

b.) A kilenc ponthoz rendelt számpárok között legalább öt különböző maradékpár van.

Ekkor a (0 ; 0), (0 ; 1), (0 ; 2), . . . (2 ; 2) számpárokat rendezzük egy 3x3-as táblázatba a következő módon:

(0 ; 0)	(0 ; 1)	(0 ; 2)
(1 ; 0)	(1 ; 1)	(1 ; 2)
(2 ; 0)	(2 ; 1)	(2 ; 2)

Jelöljük meg a táblázatban az előforduló maradékpárokat. feltevésünk szerint legalább öt mezőt megjelöltünk. Megmutatjuk, hogy ekkor van három olyan mező, amelyek

a.) vagy egy sorban vannak,

b.) vagy egy oszlopban vannak,

c.) vagy a három mező különböző sorokban és oszlopokban van.

Tegyük fel, hogy nincs három ilyen mező!

Ekkor a táblázat két oszlopában két-két darab és egy oszlopában legalább egy darab megjelölt mező van.

Mivel a sorok és-vagy oszlopok sorrendje lényegtelen, feltehetjük, hogy az első két oszlop tartalmaz két-két megjelölt mezőt. Ekkor ezek az alábbi két módon helyezkedhetnek el:

X	X	vagy
X	X	vagy
		vagy

X	X	vagy
X		vagy
	X	vagy

Mindkét esetben könnyen ellenőrizhető, hogy a harmadik oszlopban nem lehet megjelölt mező úgy hogy három megfelelően jelölt mező ki ne alakuljon.

Megjegyzés: néhány helyen a feladat 8 rácspontra vonatkoztatva szerepel.

Az alábbiakban megadott 8 rácspontra például nem teljesül az állítás:

(0 ; 0), (0 ; 1), (1 ; 0), (1 ; 1), (3 ; 3), (3 ; 4), (4 , 3) és (4 ; 4).

16.) A számegyenesen az origóbol elindul egy nyúl, amely minden másodpercben pozitív irányba ugyanakkorát ugrik és ugrásainak hossza egész szám.

Közben vágjuk ki a számegyenesből a [0; 100] intervallumot és ragasszuk össze a végeit. A buta kis nyúl ezt nem veszi észre, csak ugrál tovább-tovább.

Egyetlenegy csapdát helyezhetünk valamelyik rácspontra.

El tudjuk-e így kapni a nyulat?

Megoldás: Legyen a nyúl ugrásainak hossza n ($n \in \mathbf{N}^+$).

Tekintsük n és 100 legkisebb közös többszörösét! A nyúl előbb-utóbb eléri ezt a számot, ez viszont 100-zal osztható.

De a számegyenest 100 –nál elvágtuk és kör alakba összeragasztottuk, úgyhogy ez a pont egybeesik az origóval, azaz a nyúl véges lépésben visszajut kiindulási helyére.

Ezért ha az origóba helyezzük a csapdát és így ragasztjuk össze az elvágott számegyenest, a buta kis nyúl biztosan besétál a csapdába!