Megáll a józan ész!

(vagy csak az ész?)

Ágotai László (Kisújszállás)

A foglalkozáson olyan bizonyításokkal, okoskodásokkal foglalkozunk, amelyekből kapott eredmények a józan eszünknek és az eddigi matematikai ismereteinknek homlokegyenest ellentmondanak.

Csak néhány példa ízelítőül:

<u>Megmutatjuk, hogy minden szám:</u>

~ egyenlő a saját kétszeresével,
~ nagyobb önmagánál, illetve, hogy
~ bármely két szám egyenlő.(Tehát például 1 = -1 (???))

<u>Megeshet, hogy</u>

~ 1 = 2, és hogy $5 \cdot 13 = 8^2$?
~ Lehet, hogy $45^0 = 60^0$?
(Ha igen, akkor viszont a 3 = 4 egyenlőség is igaz!!!)

<u>Bebizonyítjuk, hogy:</u>

~ Bármely háromszög egyenlő szárú, illetve
~ van olyan háromszög, amely belső szögeinek összege nagyobb 180^0 –nál.
~ Egy derékszög nagyobb önmagánál.
~ Egy trapéz két párhuzamos oldala hosszának összege 0.
(Mit szólna ezekhez a szegény jó öreg Euklides?)

<u>Lehet az, hogy:</u>

~ Egy összeg értéke függ a tagok csoportosításától?
~ Egy szakasz hossza egyszerre egyenlő 2-vel és $\sqrt{2}$ -vel?
~ Egy pont területe egyenlő egy kör területével?

Vagy a fenti állítások mégsem igazak, csak mi okoskodtunk hibásan, vagy elhamarkodott következtetéseket vontunk le?

Valószínű, ez utóbbi igaz, a felsoroltak kivétel nélkül úgynevezett

matematikai paradoxonok.

Ezek világába kalauzol el a közösen eltöltött 90 perc.

1.) Bármely szám egyenlő a saját kétszeresével.

Legyen $a = b \quad / \cdot a$

$a^2 = ab \quad / - b^2$

$a^2 - b^2 = ab - b^2$

$(a + b)(a - b) = b(a - b) \quad / : (a - b)$

$a + b = b$, amiből

$a = b$ miatt $2b = b$, ami az állítás volt.

2.) Bármely két különböző szám egyenlő.

a.) Első bizonyítás: Legyen a,b és c pozitív és $a = b + c$, ekkor nyilván $a > b$

$a = b + c \quad / \cdot (a - b)$

$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc \quad / - ac$

$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$

$a \cdot (a - b - c) = b \cdot (a - b - c) \quad / : (a - b - c)$

$a = b$, holott $a > b$ volt.

b.) Második bizonyítás: Legyen $a,b \in \mathbf{R}$ és $c = \frac{a+b}{2}$. Ekkor

$a + b = 2c \quad / \cdot (a - b)$

$a^2 - b^2 = 2ac - 2bc \quad / + b^2 - 2ac + c^2$

$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + b^2$

$(a - c)^2 = (b - c)^2 \quad / \sqrt{\ }$

$a - c = b - c \quad / + c$

$a = b$, ami az állítás volt.

3.) Minden természetes szám egyenlő a rákövetkezőjével.

Legyen $n \in \mathbf{N}^+$ tetszőleges!

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \qquad / - (2n+1)$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2 \qquad / - n(2n+1)$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1) \qquad / + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

$$\left[(n+1) - \frac{2n+1}{2}\right]^2 = \left[n - \frac{2n+1}{2}\right]^2 \qquad / \sqrt{\ }$$

$$n + 1 - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2} \qquad / + \frac{2n+1}{2}$$

$$n + 1 = n$$

4.) Bármely szám nagyobb önmagánál.

Legyen $a,b > 0$ olyan, hogy

$$a > b \qquad /\cdot b$$
$$ab > b^2 \qquad / - a^2$$
$$ab - a^2 > b^2 - a^2$$
$$a(b - a) > (b - a)(b + a) \qquad / : (b - a)$$
$$a > b + a$$

Mivel b pozitív volt, így a nagyobb bármely, nála nagyobb $b + a$ számnál.

5.) $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$.

$$3 > 2 \qquad / \cdot log(1/2)$$
$$3 \cdot log(1/2) > 2 \cdot log(1/2)$$
$$log(1/2)^3 > log(1/2)^2$$
$$(1/2)^3 > (1/2)^2$$
$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}.$$

6.) 1 = 2

Ismert trigonometrikus azonosság, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Ezért $\left(\cos^2 x\right)^{3/2} = \left(1 - \sin^2 x\right)^{3/2}$

Ebből $\cos^3 x = \left(1 - \sin^2 x\right)^{3/2} \qquad / +3$

$$cos^3 x + 3 = \left(1 - sin^2 x\right)^{3/2} + 3$$

Ezt négyzetre emelve

$$\left(\cos^3 x + 3\right)^2 = \left[\left(1 - \sin^2 x\right)^{3/2} + 3\right]^2$$

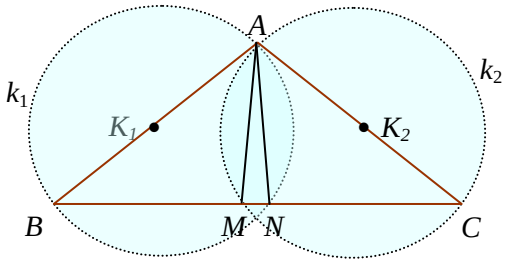
Legyen most $x = \pi$, ekkor $\cos\pi = -1$ és $\sin\pi = 0$, így

$$(-1 + 3)^2 = (1^{3/2} + 3)^2,$$

azaz $2^2 = 4^2$, tehát $2 = 4$, azaz $1 = 2$.

Geometriai problémák

7.) Van olyan háromszög, melynek belső szögösszege nagyobb 180^0 –nál.



Legyen k_1 és k_2 két egyenlő sugarú, egymást metsző kör.

Húzzuk meg az A metszéspontból kiinduló AB és AC átmérőiket.

Ekkor a Thales-tétel miatt $AMC\angle = ANB\angle = 90^0$.

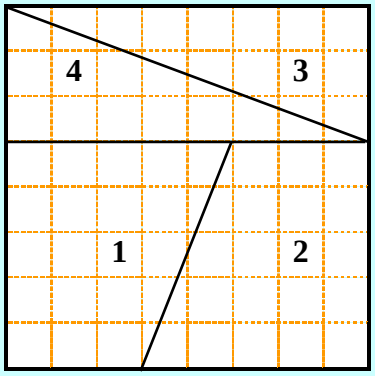
De ekkor az AMN háromszög szögösszegére

$AMN\angle + ANM\angle + NAM\angle = 180^0 + NAM\angle > 180^0$ adódik.

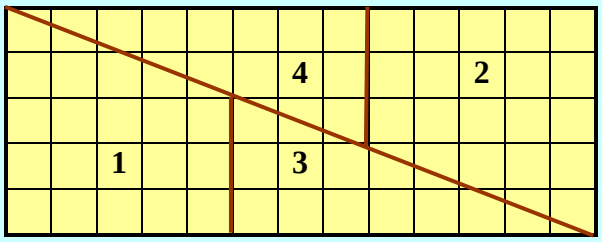
Azaz van olyan háromszög, melynek belső szögösszege nagyobb 180^0 –nál.

Sőt! Egy egyenesre (BC) két különböző pontjában (M és N) emelt merőlegesek metszik egymást!

8.) $8^2 = 5 \cdot 13$.



a.) ábra



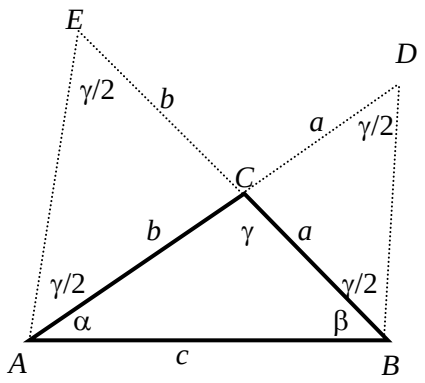
b.) ábra

Az a.) ábrán lévő 8 x 8 –as négyzetet az ábra szerint átdarabolhatjuk a b.) ábrán lévő téglalappá.

Ezért területük egyenlő, azaz $8^2 = 5 \cdot 13$.

9.) Bármely háromszög egyenlő szárú.

1.Bizonyítás. (trigonometrikus bizonyítás):



Az ABC háromszög AC és BC oldalait hosszabbítsuk meg $CD = CB$ –vel és $CE = CA$ –val az ábrán látható módon. Ekkor a külsőszög-tétel miatt

$EAC\angle = AEC\angle = DBC\angle = CDB\angle = \gamma/2$.

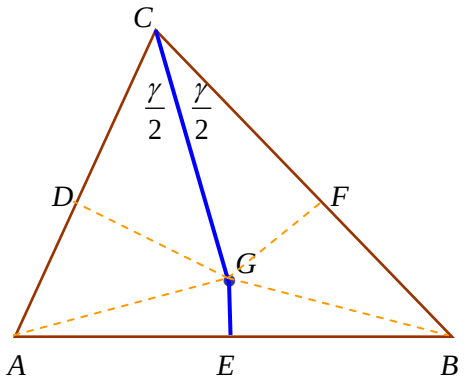
Az ABD és ABE háromszögekben írjuk fel a sinustételt:

$$\frac{BC+AC}{AB} = \frac{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \text{és} \quad \frac{BC+AC}{AB} = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Ezekből $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, azaz $\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)$,

amiből $\alpha+\frac{\gamma}{2} = \beta+\frac{\gamma}{2}$, tehát $\alpha = \beta$, ezért a háromszög egyenlő szárú.

2.Bizonyítás (elemi geometriai bizonyítás):



Legyen G a $C\angle$ szög szögfelezőjének és az AB oldal felező merőlegesének a metszéspontja.

(tételezzük most fel. hogy G a háromszög belsejében van!)

Bocsássunk G –ből merőlegeseket a háromszög AC és BC oldalaira, ezek talppontjai legyenek D és F.

Ekkor a CGD és a CGF háromszögek egybevágók, mivel szögeik páronként egyenlők és CG oldaluk közös.

Ezért $DG = GF$.

Kössük most össze G-t A-val *és* B-vel. Ekkor nyilván $AG = GB$.

De $GD = GF$ is teljesült, így a GDA és GFB háromszögek is egybevágók.

A CGD és CGF háromszögek egybevágóságából $CD = CF$ (*)

míg a GDA és GFB háromszögek egybevágóságából $DA = FB$ (**)

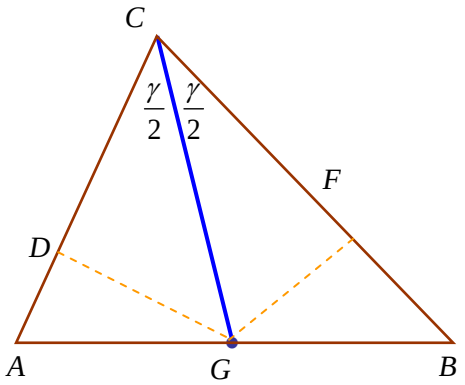
(*)-ot és (**)-ot összeadva $CD + DA = CD + FB$, azaz

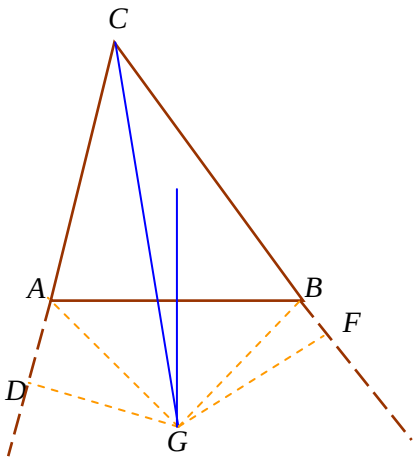
***AC = BC*, tehát háromszögünk egyenlő szárú**.

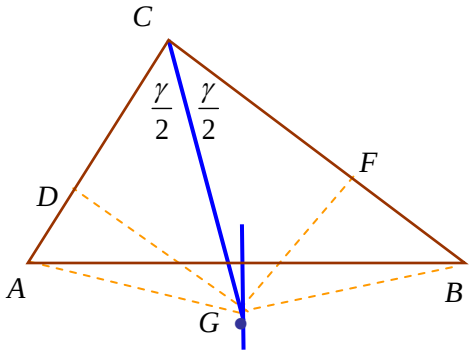
(ráadásul ezt az okoskodást pld. az A szög szögfelezőjére megismételve $AC = AB$ adódna, tehát a háromszög – azaz bármely háromszög – szabályos lenne!)

Nyilván, nem biztos, hogy G a háromszög belsejében van, a további lehetőségeket az alábbi ábrák veszik számba.

A fenti okoskodás azonban ezekben az esetekben is helytálló.







10.) Egy derékszög egyenlő egy tompaszöggel (Azaz a derékszög nagyobb önmagánál)

Húzzunk B-ből egy BC-vel egyenlő BE szakaszt, és szerkesszük meg AB és DE felezőmerőlegeseit!

~ Ekkor $AD = BC = BE$, mert BE-t úgy szerkesztettük,

~ $PA = PB$ és $PD = PE$, mert P a felezőmerőlegesek metszéspontja,

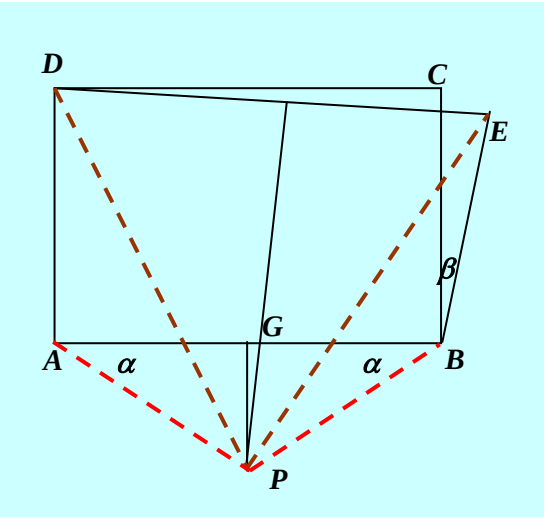
ezért az APD és BEP háromszögek egybevágók.

Mivel egybevágó háromszögek megfelelő szögei egyenlők, így $DAP\angle = EBP\angle$

De $DAP\angle = 90^0 + \alpha$ és $EBP\angle = 90^0 + \alpha + \beta$, ezért

$90^0 = DAP\angle - \alpha = EBP\angle - \alpha = 90^0 + \beta$.

Tehát $\underline{90^0 = 90^0 + \beta}$ ($> 90^0$)



11.) $45^0 = 60^0$, azaz 3 = 4.

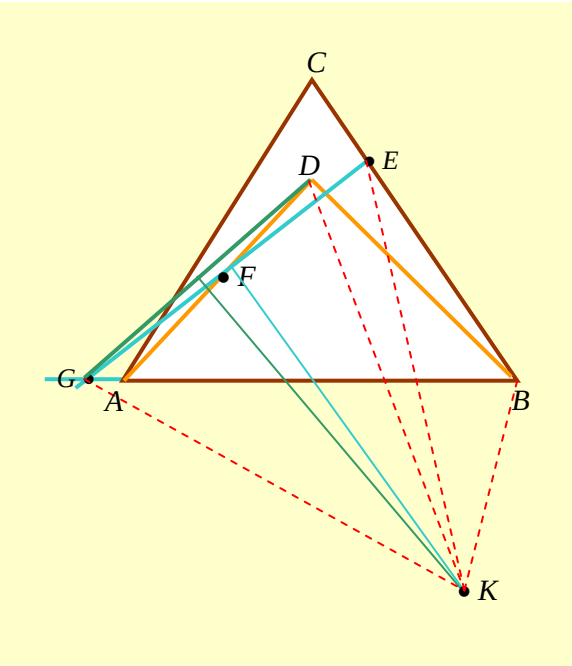
Szerkesszünk az ABC szabályos háromszög AB oldalára befelé egy ABD egyenlőszárú derékszögű háromszöget, és vegyük fel a BC oldalon azt az E pontot, amelyre $BE = BD$.

Az AD szakasz felezőpontja legyen F, az EF egyenes AB egyenessel való metszéspontja G.

A GD és GE szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontja K.

Mivel $KA = KD = KE$, és $BD = BE$, a KDB és KEB háromszögek egybevágók.

Emiatt $KBD\angle = KBE\angle$.



De ekkor $KBD\angle - KBA\angle = KBE\angle - KBA\angle$ is igaz kell, hogy legyen.

Azonban $KBD\angle - KBA\angle = ABD\angle = 45^0$, míg

$KBE\angle - KBA\angle = ABC\angle = 60^0$.

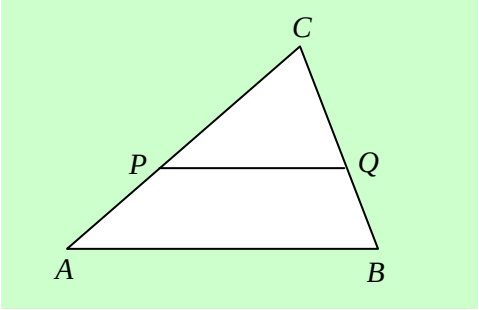
tehát $45^0 = 60^0$, melyet 15 –tel osztva 3 = 4 adódik!

12.) Két különböző hosszúságú szakasz egyenlő.

Tekintsük az ABC háromszöget és legyen $PQ \,||\, AB$.

Ekkor $ABC\Delta \sim PQC\Delta$, hiszen szögeik páronként egyenlők.

Emiatt $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PC}$, amiből



$AB \cdot PC = AC \cdot PQ \qquad / \cdot (AB - PQ)$

$AB^2 \cdot PC - AB \cdot PC \cdot PQ = AB \cdot AC \cdot PQ - PQ^2 \cdot AC \qquad / + AB \cdot PC \cdot PQ; \quad / - AB \cdot AC \cdot PQ$

$AB^2 \cdot PC - AB \cdot AC \cdot PQ = AB \cdot PC \cdot PQ - PQ^2 \cdot AC$

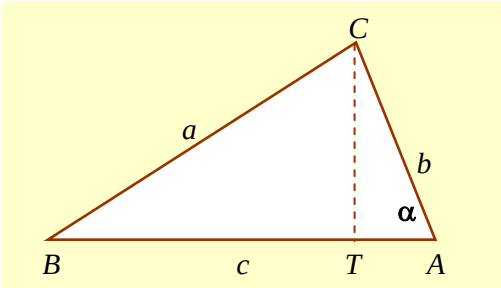
mindkét oldalon kiemelve

$AB(AB \cdot PC - AC \cdot PQ) = PQ(AB \cdot PC - PQ \cdot AC) \qquad / : \; (AB \cdot PC - AC \cdot PQ)$

kapjuk, hogy $AB = PQ$.

13.) Egy szakasz egyenlő egy nála kisebb szakasszal.

Mielőtt a feladathoz hozzáfognánk, értelmezzük egy kicsit a cosinustételt:



Írjuk fel a cosinustételt az α hegyesszögre:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha .$$

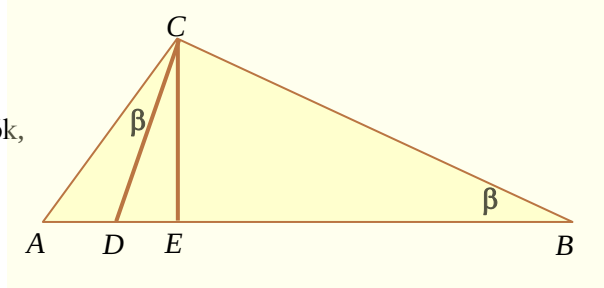
A $b \cdot \cos\alpha$ mennyiség geometriai jelentéssel bír, nevezetesen egyenlő a $b = AC$ oldal AB oldalra eső TA merőleges vetületének a hosszával.

Ezért kimondhatjuk a következő tételt:

Tétel: ***A háromszögben bármely, hegyesszöggel szemben lévő oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegéből kivonva ezek közül az egyik oldal és a másik előzőre eső merőleges vetületének kétszeres szorzatát.***

<u>Most a feladat:</u>

Tekintsünk egy olyan ABC háromszöget, amelyben az $A\angle$ hegyesszög, és $C\angle > B\angle$!



Ekkor nyilván $AC < AB$ kell, hogy legyen.

Vegyük fel a D pontot úgy, hogy $ACD\angle = \beta$ legyen.

Ekkor $ABC\Delta \sim ADC\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők,

ezért területeik aránya $\dfrac{t_{ABC}}{t_{ADC}} = \dfrac{CB^2}{CD^2}$.

Másrészt CE a két háromszög közös magassága, így

$$\frac{t_{ABC}}{t_{ADC}} = \frac{AB}{AD}.$$

Ezekből $\dfrac{CB^2}{CD^2} = \dfrac{AB}{AD}$. Ennek mindkét oldalát szorozva CD^2 –tel és osztva AB –vel kapjuk, hogy

$$\frac{CB^2}{AB} = \frac{CD^2}{AD}.$$

Alkalmazzuk most az előző tételt CB^2-re és CD^2 -re:

$$\frac{AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AE}{AB} = \frac{AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AD \cdot AE}{AD}.$$

Innen $\dfrac{AC^2}{AB} + AB - 2 \cdot AE = \dfrac{AC^2}{AD} + AD - 2 \cdot AE \quad / \; + 2 \cdot AE \; ; \; / - (AB + AD)$

$\dfrac{AC^2}{AB} - AD = \dfrac{AC^2}{AD} - AB$, amiből $\dfrac{AC^2 - AB \cdot AD}{AB} = \dfrac{AC^2 - AB \cdot AD}{AD}$ (*)

és innen a számlálók egyenlősége miatt a nevezők is egyenlők, azaz $AB = AD$.

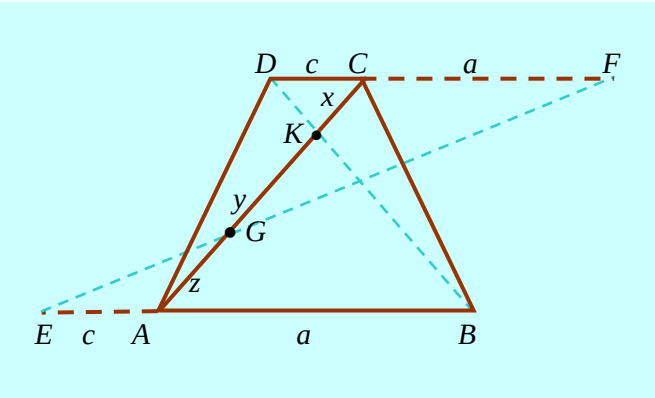
<u>Ezért az AB szakasz hossza egyenlő az általa valódi részként tartalmazott, tehát tőle rövidebb AD szakasz hosszával!</u>

14.) Egy trapéz alapjainak az összege 0 –val egyenlő.

Hosszabbítsuk meg az AB alapot $EA = c$- vel és a CD alapot $CF = a$-val az ábra szerint!

Húzzuk meg továbbá az AC átlót, valamint az EF és BD szakaszokat!

Legyen $AG = z$, $GK = y$ és $KC = x$!



Ekkor $ABK_\Delta \sim CDK_\Delta$, mert szögeik páronként egyenlők, ezért $\frac{DC}{AB} = \frac{KC}{KA}$, azaz $\frac{c}{a} = \frac{x}{y+z}$.

Ugyanígy az EAG és FCG háromszögek hasonlósága miatt $\frac{AE}{CF} = \frac{AG}{GC}$, tehát $\frac{c}{a} = \frac{z}{y+x}$.

Innen $\frac{c}{a} = \frac{x}{y+z} = \frac{z}{y+z}$, azaz $\frac{x}{y+z} = \frac{z}{y+x}$.

Használjuk fel, hogy ha $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, akkor $\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = \frac{A-a}{B-b}$.

Ezért $\frac{c}{a} = \frac{x-z}{y+z-(y+x)} = \frac{x-z}{z-x} = -1$, azaz $\frac{c}{a} = -1$, tehát $c = -a$,

azaz $\underline{a + c = 0}$, tehát az $ABCD$ trapéz alapjainak összege 0!

15.) Egy pont ugyanakkora, mint egy vonal?!

Húzzuk meg az $ABCD$ négyzet BD átlóját, illetve B körül az AC negyedkörívet!

Húzzunk a négyzet belsejében bárhol egy BC-vel párhuzamos HE szakaszt!

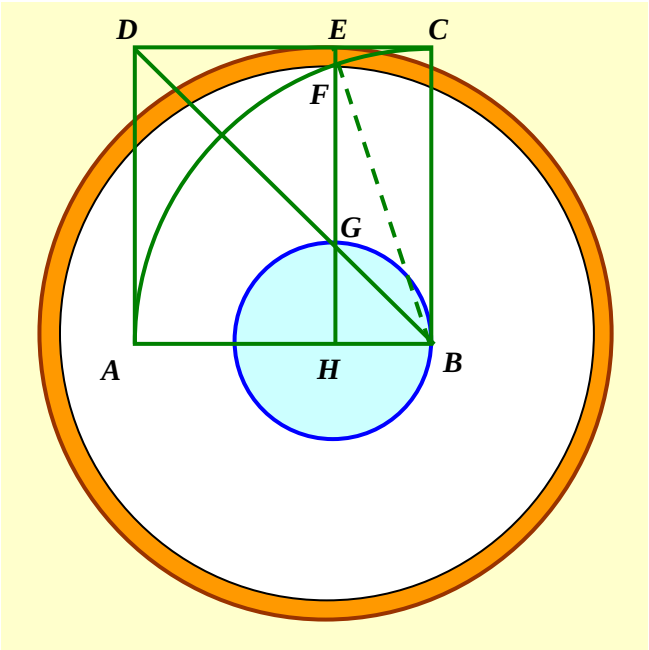
Az FBH háromszög derékszögű, így $HB^2 = BF^2 - HF^2$. (*)

De $HE = BC$ és $BC = BF$ miatt $HE = BF$, valamint $HB = HG$, ezért (*) –ból

$HG^2 = HE^2 - HF^2 \quad / \cdot \pi$

$\pi \cdot HG^2 = \pi \cdot HE^2 - \pi \cdot HF^2$,

azaz $T_{kék\ kör} = T_{körgyűrű.}$



Ha most HE –t elkezdjük mozgatni BC felé, akkor a kék körből a B pont lesz, a körgyűrűből viszont B középpontú, HE=BC sugarú kör! Mivel viszont az előbbiek szerint a kék körnek HE bármely helyzetében ugyanakkora a területe, mint a körgyűrűnek, így azt kapjuk, hogy egyetlen pont ugyanakkora területű, mint egy kör! (Ráadásul a körgyűrűből a BC sugarú kör kerülete lesz, a kék körből viszont egy pont!)

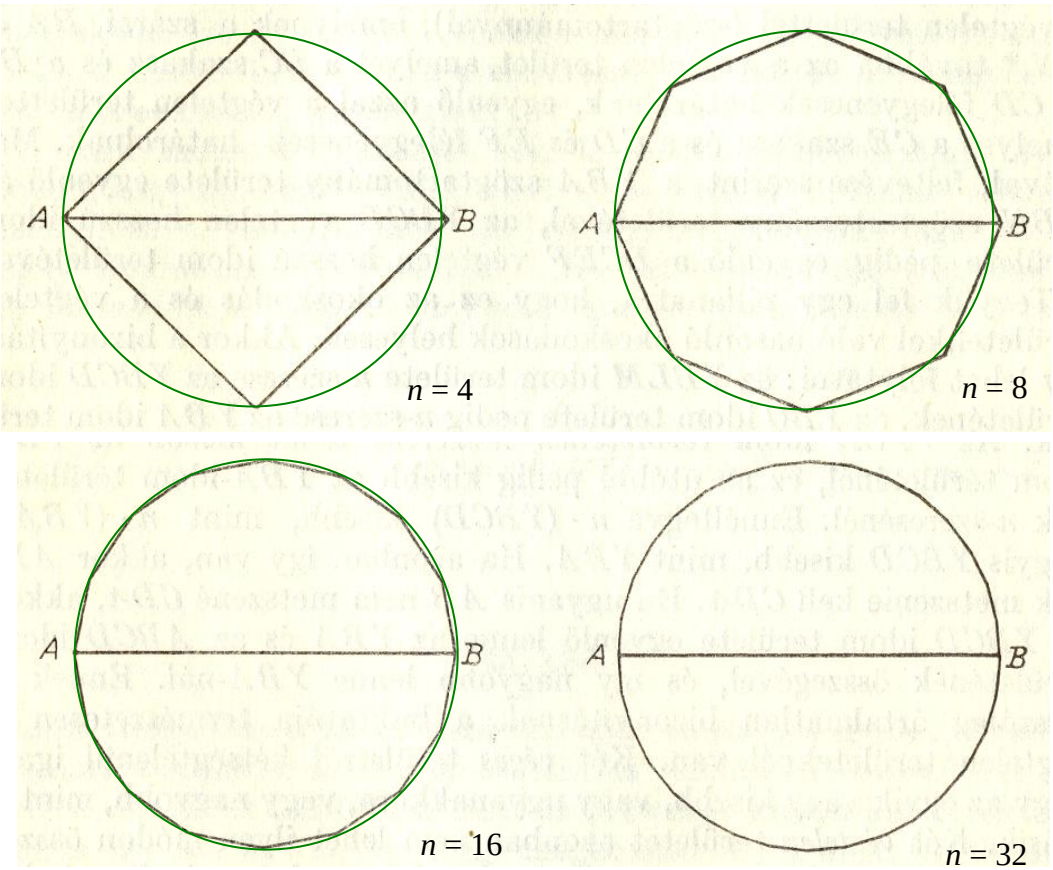
Vagy mégsem?

A határgörbék

görbék határértéke, a határgörbék hossza

Def: Határgörbének nevezzük az olyan görbéket, amelyek sokszögek végtelen sorozatainak, mint alakzatok sorozatának a határértékei.

1.Példa: Egy körbe írt szabályos sokszögek végtelen sorozatának határgörbéje az adott kör.



Tudjuk, hogy a szabályos sokszögek egyben húrsokszögek és így a köré írt kör középpontjából n db. egyenlőszárú háromszöggé darabolhatók át, amelyek szárszöge $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$ és amely háromszögek alapjainak összege megegyezik az n - szög K_n területével.

Könnyen bizonyítható, hogy $lim\ K_n = 2R\pi = K_{kör}$, ugyanis ha R a kör sugara, akkor a sinustételből

$a_n = 2R \cdot sin\frac{\pi}{n}$, ahol a_n a körbe írt szabályos n-szög oldala, azaz a sokszög kerülete

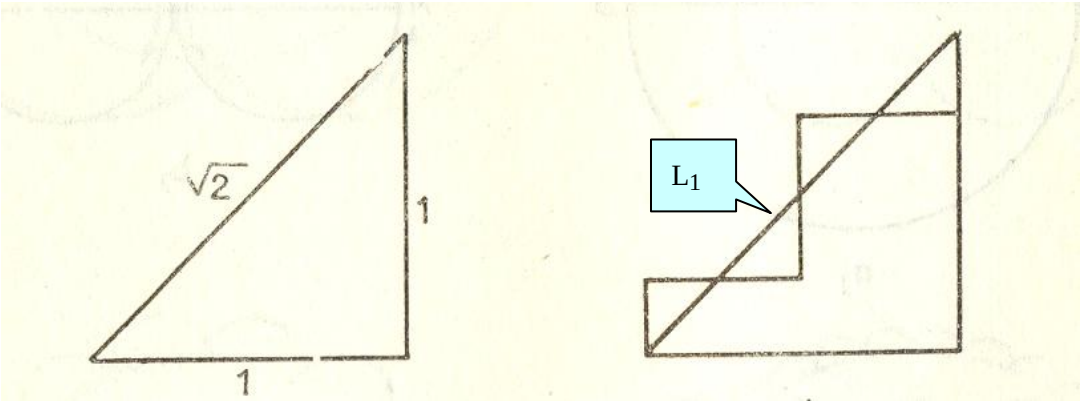
$$k_n = n \cdot 2R \cdot sin\frac{\pi}{n} = 2R\pi \frac{sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2R\pi \cdot \frac{sin\,\varphi_n}{\varphi_n}, \text{ ahol } \varphi_n = \frac{\pi}{n} \text{ és } \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ ha } n \to +\infty.$$

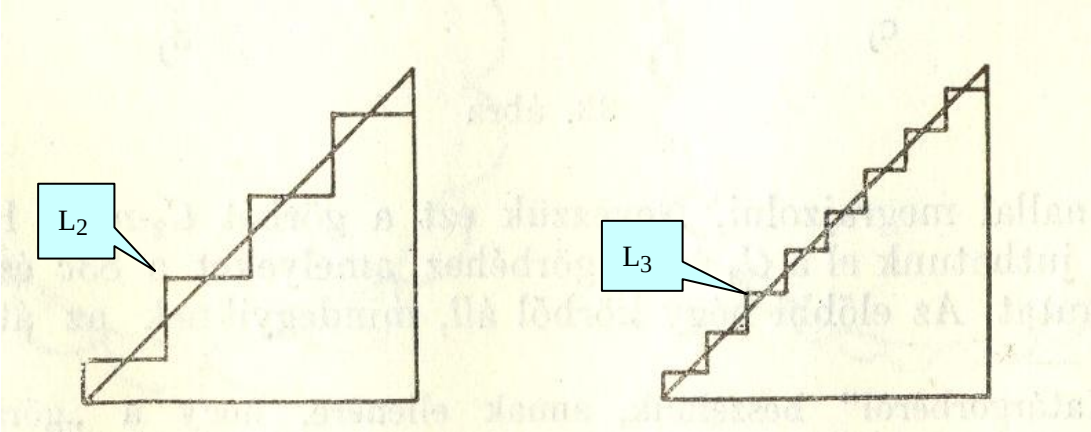
Ezért felhasználva a $\frac{sin\,x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ határértéket: $k_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2R\pi$

Ebben az esetben tehát teljesül, hogy a határgörbe (ív)hossza megegyezik a görbék (ív)hosszainak határértékével.

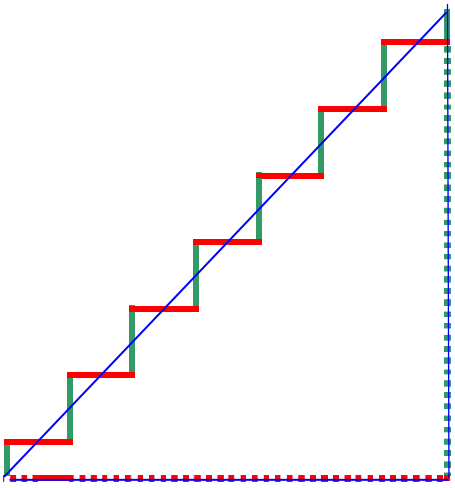
Ez azonban – legalábbis látszólag – nem mindig van így.

1.) Feladat:





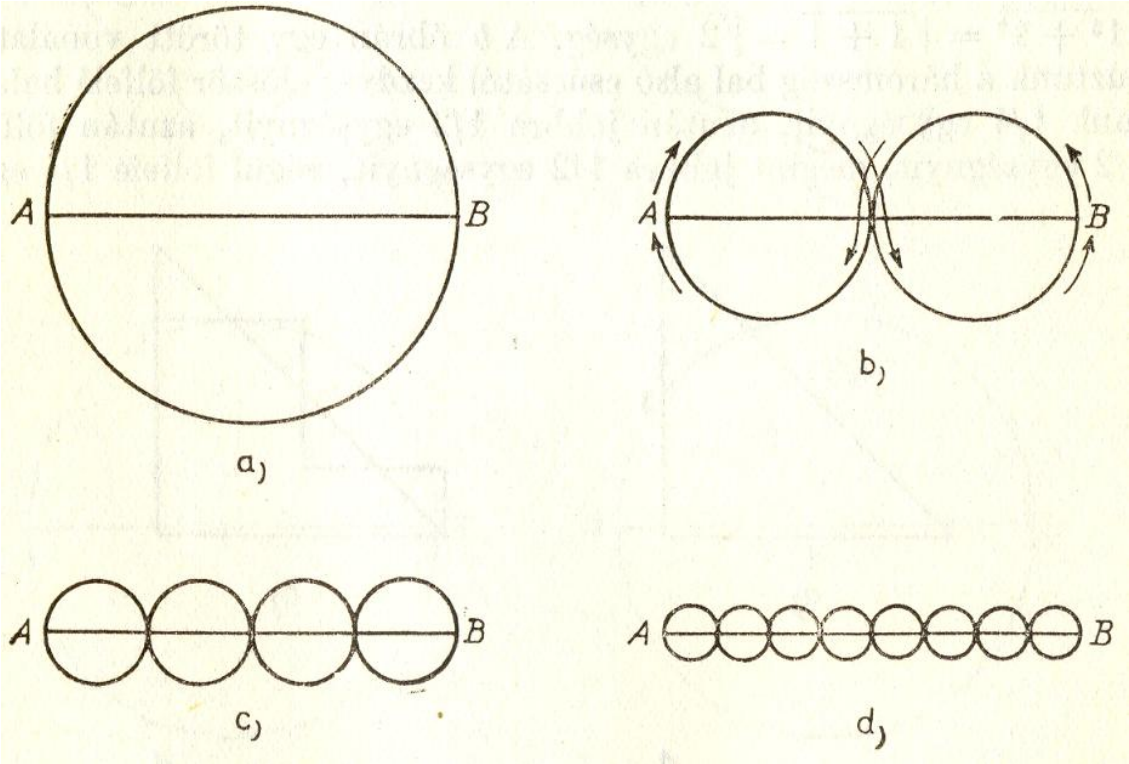
Tekintsük az egységnyi befogójú derékszögű háromszöget. Írjunk ebbe egy törött vonalat a bal alsó csúcstól kezdve, mégpedig:
felfelé haladjunk 1/4 egységet, utána jobbra 1/2 –et, majd felfelé is 1/2 -et, jobbra ismét 1/2 -et végül felfelé 1/4 -et. Ezt a töröttvonalat jelöljük L_1 –gyel.
A következő lépésben kétszerezzük meg a lépések számát, a kapott töröttvonal legyen L_2, majd újra kétszerezve a lépések számát L_3 stb. Folytassuk az eljárást a végtelenségig.
Az ábrák szerint a törött vonalak határgörbéje a háromszög átfogója, amelynek $\sqrt{2}$.
Ezek szerint a törött vonalak hosszának határértéke $\sqrt{2}$.



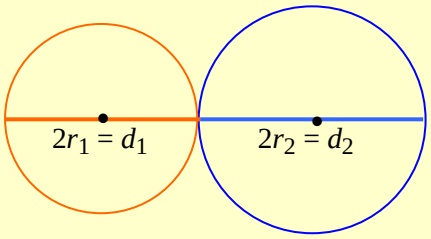
Másrészt: a lépcső piros és a zöld vonalainak összege bármely lépcső esetén a háromszög befogói hosszának összegével, azaz 2-vel egyenlő.
Így a határgörbe hossza 2.

Most mi az igazság?

2.) Feladat: Szerkesszünk egy *AB* átmérőjű kört, legyen ez a görbe G_1.
Szerkesszük meg most azt a görbét, amely két, egyenként *AB*/2 átmérőjű körből áll, és tekintsük ezt egyetlen, 8-as alakú görbének, ahol a bejárást az ábra mutatja. Legyen ez a görbe G_2.
A c, ábrán lévő görbe legyen G_3, a d, ábrán lévő G_4 és így tovább.
Folytassuk ezt a végtelenségig, minden lépésben kétszerezve a körök számát.
Így egy olyan görbesorozathoz jutunk, amelynek határgörbéje az *AB* szakasz, amelynek hossza $2 \cdot AB$, hiszen minden esetben *A*-ból elmegyünk *B*-be és onnan vissza *A*-ba.
Ezek szerint a határgörbe hossza, tehát a görbék hosszának határértéke $2 \cdot AB$.
Igaz ez?



Másfelől:



$k_1 = 2r_1 \cdot \pi = d_1 \cdot \pi$ és $k_2 = 2r_2 \cdot \pi = d_2 \cdot \pi$

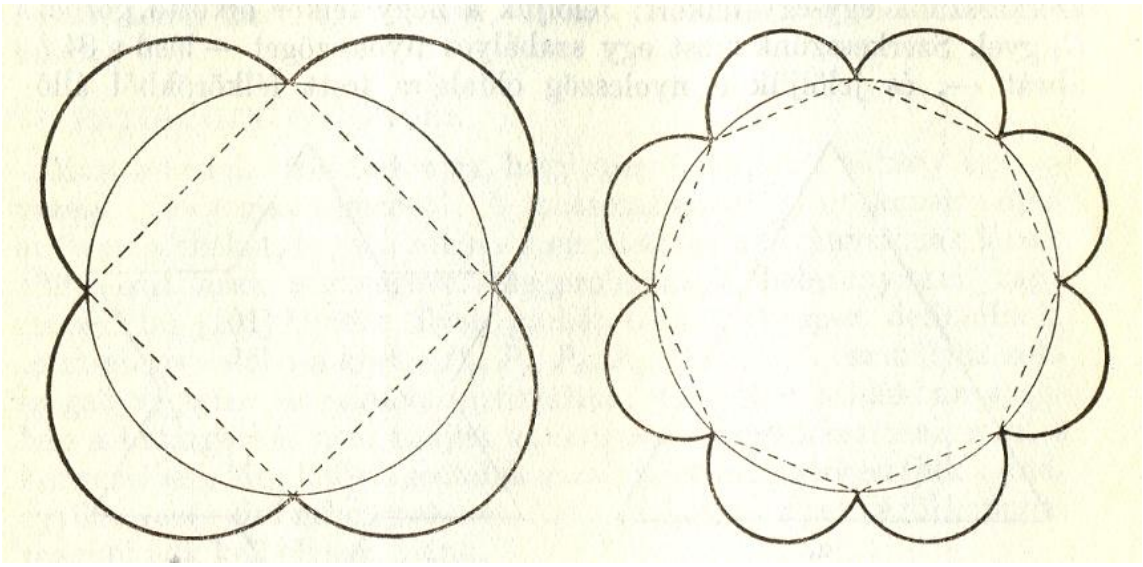
Ezért $k_1 + k_2 = d_1 \cdot \pi + d_2 \cdot \pi = (d_1 + d_1) \cdot \pi$

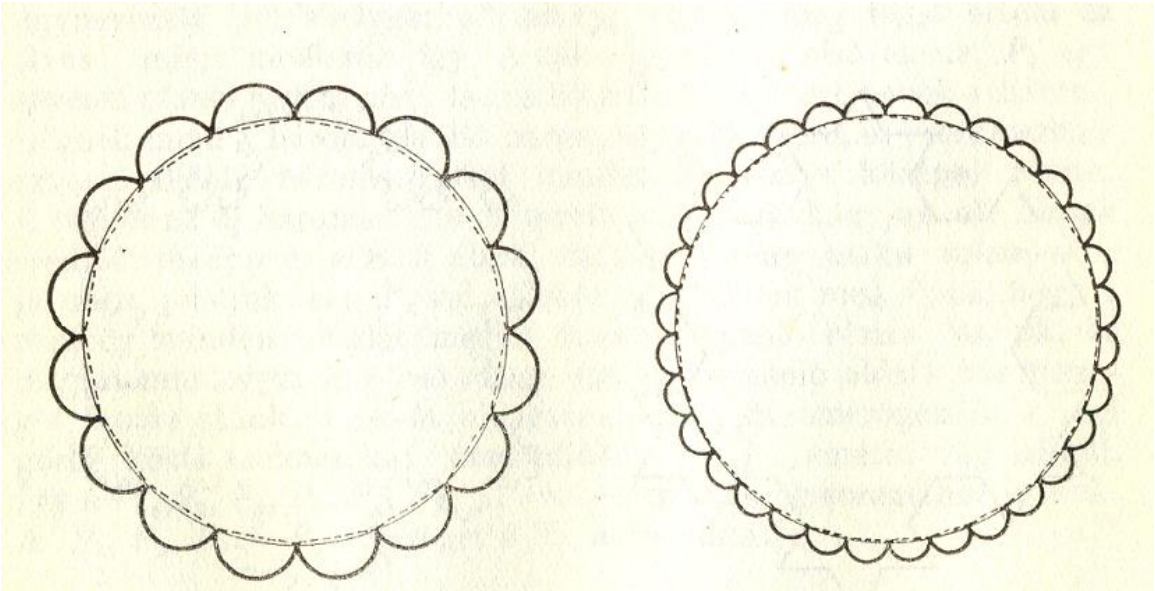
Tehát az előző feladatban:

$$lim|G_i| = lim \sum_i k_i = AB \cdot \pi$$

Akkor most menyi is a határgörbe ívhossza?

3. Feladat:





Írjunk egy R sugarú körbe négyzetet, és ennek oldalaira kifelé szerkesszünk félköröket! (a.) ábra)
Legyen a négy félkör alkotta görbe G_1.
Szerkesszünk most a körbe egy szabályos nyolcszöget, ugyancsak írjunk félköröket az oldalaira.
Legyen a nyolc félkör alkotta görbe G_2.
Folytassuk a végtelenségig a sokszögek oldalszámának kétszerezését, kapjuk a G_3, G_4 stb.. végtelen görbesorozatot.
Ennek a görbesorozatnak a határgörbéje végtelen kicsi sugarú félkörökből áll, nem is tudjuk megkülönböztetni az eredeti R sugarú körtől.

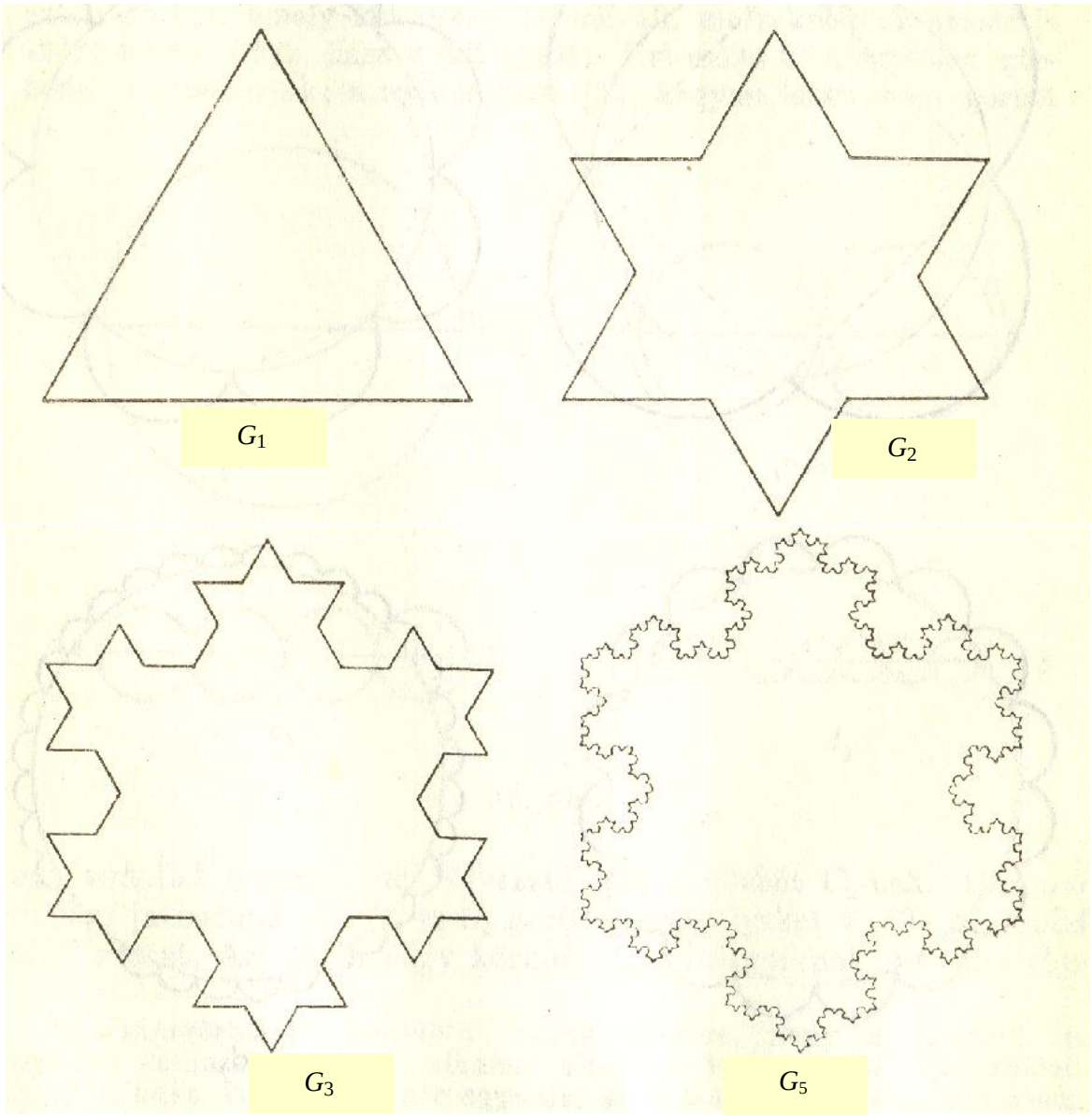
Ezek szerint a határgörbe hossza $2R\pi$.

Vagy mégsem?

Patológikus görbék

1.) A hópehelygörbe:

Van-e olyan görbe, amelynek hossza végtelen, de mégis véges területet határol?



Azt hogy ennek a görbeseregnek minden tagja véges területet határol, könnyen beláthatjuk, hiszen egyek görbe sem lép ki az eredeti háromszög köré írt köréből, tehát bármelyik görbe által határolt terület kisebb a köré írt kör területénél.

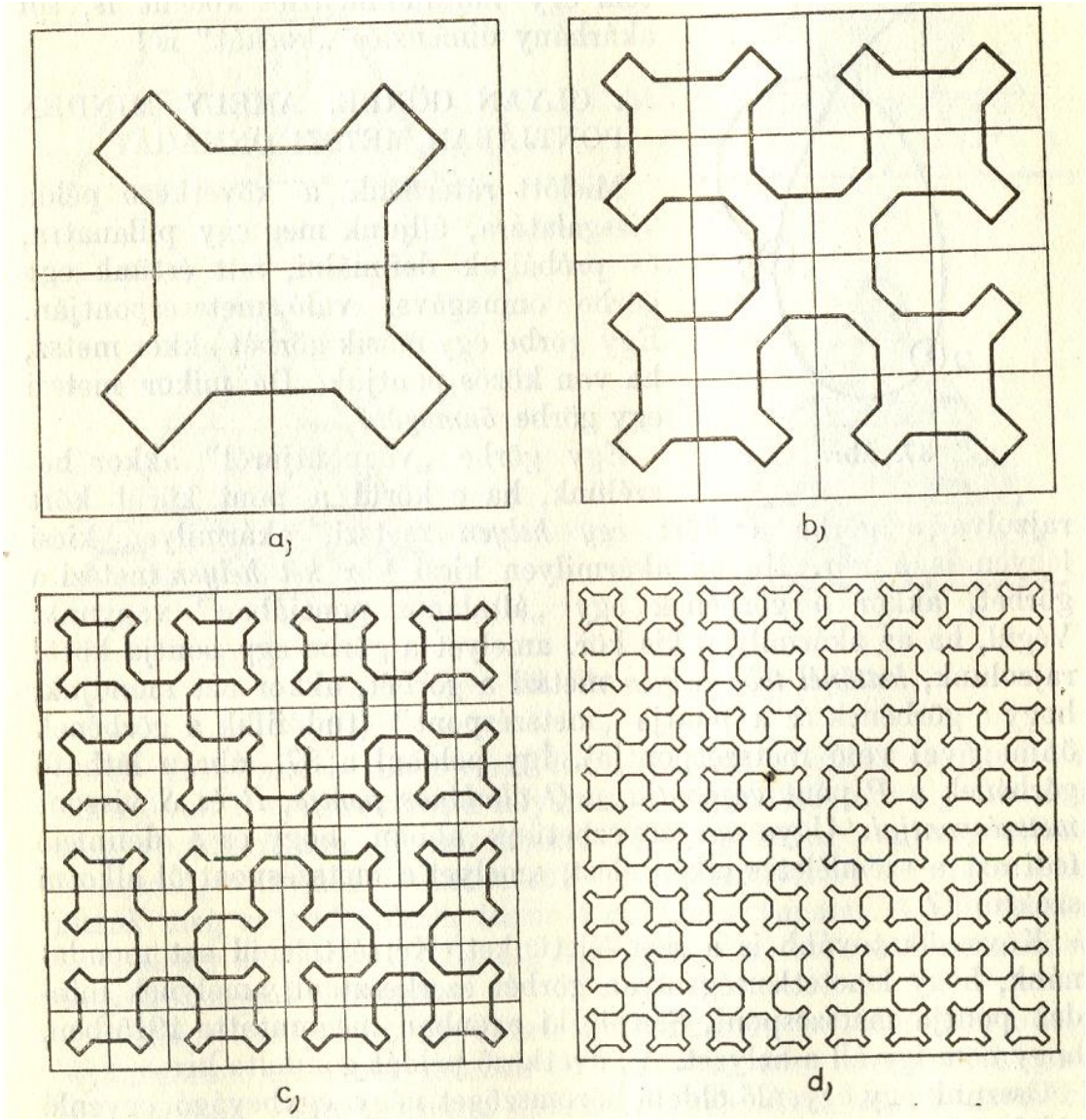
A görbék kerülete: A G_1 kerülete 3 egység. Ezt az első lépésben 1-gyel növeltük, hiszen minden oldalon 1/3-dal nőtt a törött vonal hossza, így G_2 hossza 3 +1 (= 4).

A harmadik lépésben ezt megint 1/3 –ával növeltük, így G_3 kerülete: 3 + 1 + 4/3,

G_4 –é $3+1+\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2$, stb, tehát a határgörbe hossz a

$3+1+\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^4+\ldots+\left(\frac{4}{3}\right)^n+\ldots$ nyilván ($+\infty$) –hez tartó végtelen sor összege.

2.) Van-e olyan görbe, amelyik teljesen kitölt egy síkidomot?



(Waclav Sierpinski, lengyel)

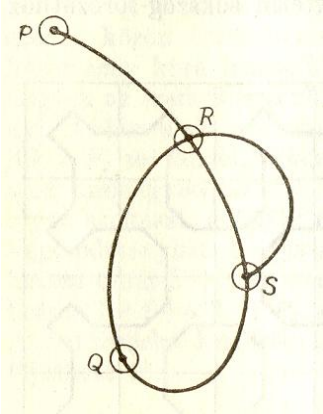
Nem könnyen, de bizonyítható, hogy a sokszögsorozat határgörbéje a négyzet minden pontján áthalad, ezért teljesen kitölti a négyzetet.

Görbék önmagukkal való metszéspontjáról

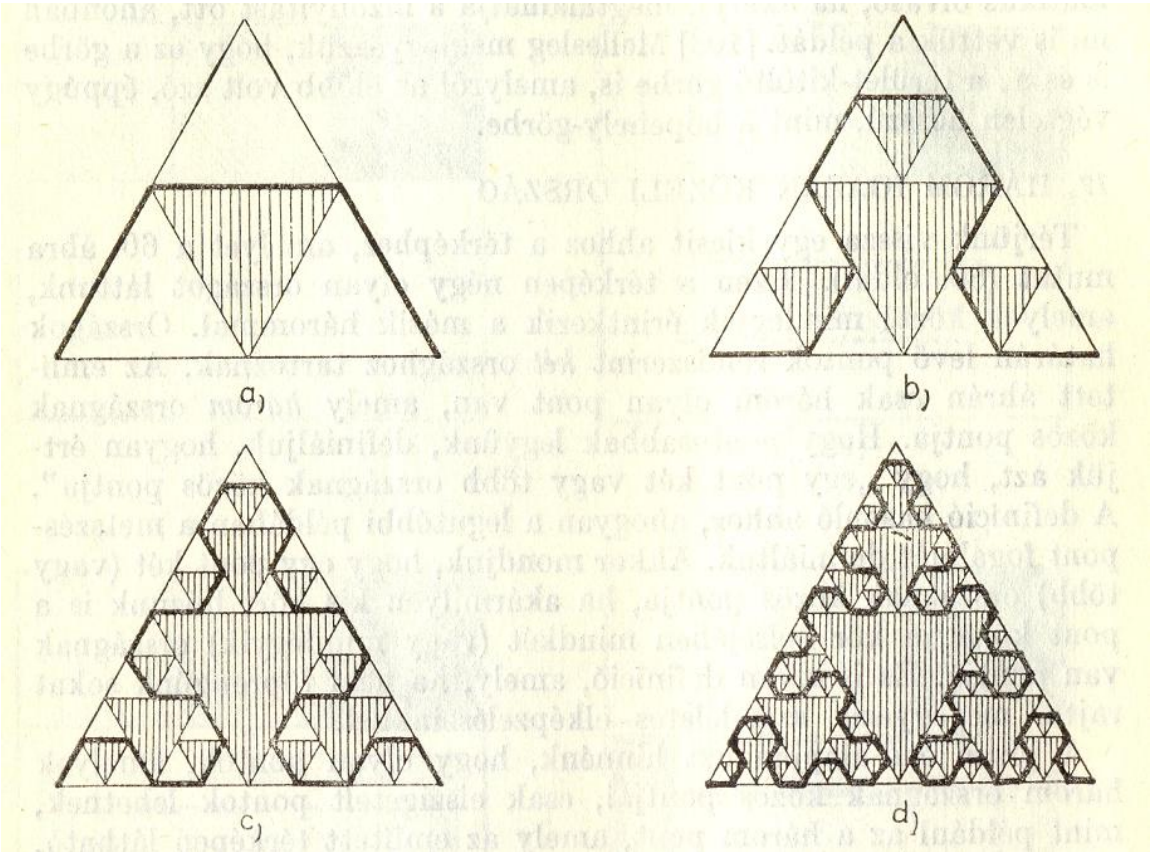
Definícó: Tekintsünk egy g görbét.

Ha ennek valamely pontja körüli bármilyen kicsi sugarú kör a görbét

- egy helyen metszi, úgy az a pont végpont.(P)
- két helyen metszi, akkor az egy belső vagy általános pont. (Q)
- három vagy több helyen metszi, akkor önmagával való metszéspont. (R vagy S)



3.) Van-e olyan görbe, amelyik önmagát minden pontjában metszi? (Sierpinski, 1915.)



A kapott görbe minden pontja – kivéve az eredeti háromszög csúcsait – metszéspont az előbbi értelemben.